

Traitement Numérique de l'Image

Pré-Traitements

TELECOM Nancy 2^{ème} Année

Vincent Bombardier
(MDC HC 61^{ème} Section)

Centre de Recherche en Automatique de Nancy -UMR CNRS 7039-
Département: Ingénierie des Systèmes Eco-Technique
Projet Systèmes Intelligents Ambiants

ISCT

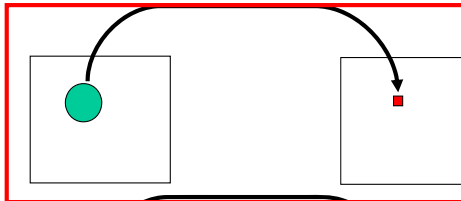
Pré-traitements :

3 catégories de traitements

Image origine Image traitée



Traitement au niveau du pixel:
 $g(i_0, j_0) = T[f(i_0, j_0)]$
Look Up Table, Histogramme



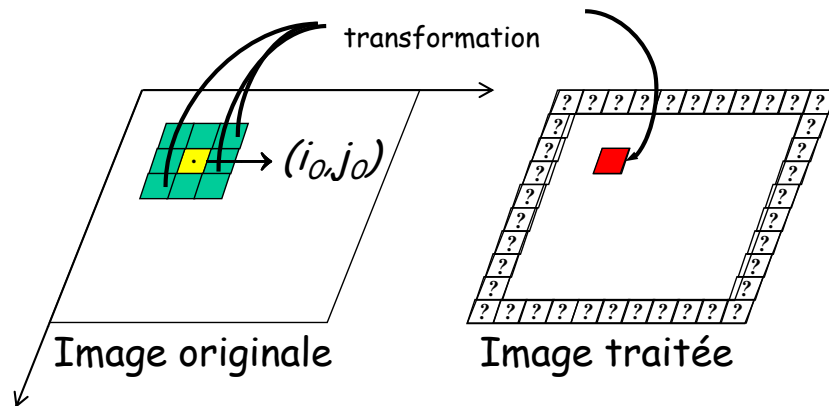
Traitement aux environs du pixel:
 $g(i_0, j_0) = T[f(V)]$
V: voisinage de (i_0, j_0)
Filtrage linéaire, non-linéaire, Morphologie mathématique



Traitement global: $g(i_0, j_0) = T[f(i, j)]$
Transformée Cosinus, Fourier, ondelettes...

Pré-traitements :

Transformation basée sur le voisinage d'un point (x, y)



? Gestion des bords :
→ propagation ? mise à zéro ? On ne filtre pas les bords ? On supprime les bords ? On augmente la taille de l'image ? Et si le masque grand ?

Pré-traitements :

Filtrage Spatial

➤ Filtrage Linéaire : Convolution

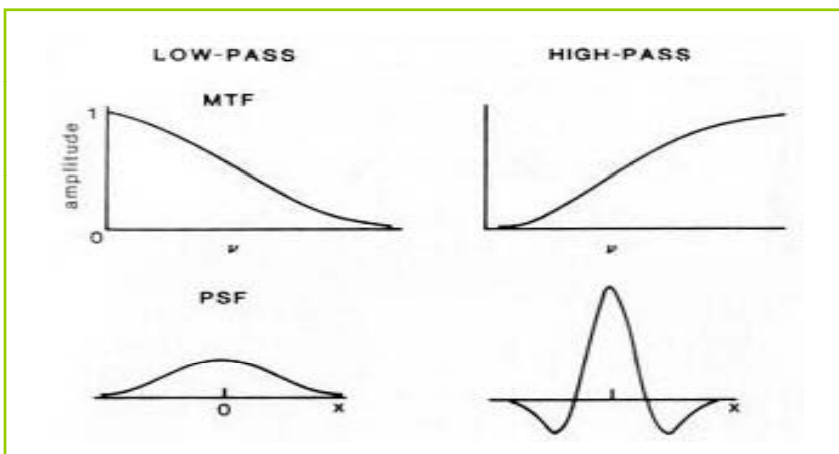
- ↳ Passe-bas :
 - Lissage : réduction du bruit
- ↳ Passe-haut :
 - Accentuation des contours

➤ Filtrage non-linéaire : Modèle ensembliste

- ↳ Médian
- ↳ Morphologie mathématique

Pré-traitements : Filtrage Spatial

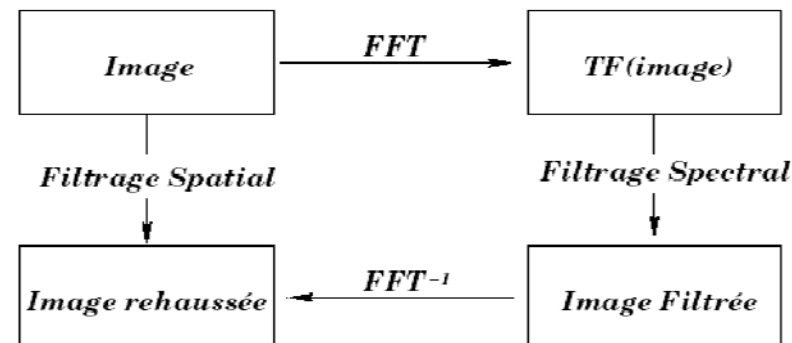
Domaine fréquentiel



Domaine spatial

- MTF (Modulation Transfer Function) : Fonction de transfert du filtre
- PSF (Point Spread Function) : Fonction d'Étalement Spectrale (\approx R.I.)

Pré-traitements : Convolution - Produit



CORRESPONDANCE CONVOLUTION / PRODUIT

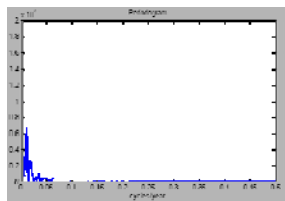
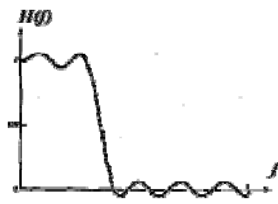
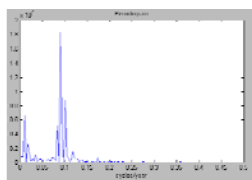
$$f [i, j] * h [i, j] \rightarrow F [u, v] \cdot H [u, v]$$

$$f [i, j] \cdot h [i, j] \rightarrow F [u, v] * H [u, v]$$

Pré-traitements : Correspondance fréquentiel - Spatial

➤ Filtrage fréquentiel :

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$



➤ Filtrage Spatial :

➤ Grâce à la correspondance Convolution - Produit dans la transformée de Fourier, le filtrage de l'image $F(u,v)$ par le filtre $H(u,v)$ se traduit dans le domaine spatial par la convolution de l'image $f(x,y)$ par la R.I. du filtre $h(x,y)$:

$$F^{-1} \{ F(u,v) \cdot H(u,v) \} = f(i,j) * h(i,j) = g(i,j)$$

Pré-traitements : Implantation des filtres linéaires

➤ Convolution Directe par noyau

- ↪ Séparable ou non
- ↪ Filtrage à Réponse Impulsionnelle Finie (FIR)
- ↪ Temps de calcul : $O(K^2 N^2)$ ou $O(KN^2)$

➤ Implémentation récursive

- ↪ Application causale et anticausale
- ↪ Filtrage à Réponse Impulsionnelle Infinie (IIR)
- ↪ Temps de calcul : $O(N^2)$

➤ Multiplication dans le domaine de Fourier

- ↪ Temps de calcul : $O(N \cdot \log_2(N))$

Pré-traitements : Du continu 2D au discret 2D

- Rappel : En continu, on a

$$(f * h)(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x - \eta, y - \xi) h(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

- En discret, la convolution s'écrit

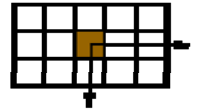
$$(f * h)(i, j) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(i - k, j - l) h(k, l)$$

➤ La convolution permet de définir de nombreux opérateurs

Pré-traitements : Convolution Discrète 2D

- Le domaine de l'image et le support de H sont bornés.

- Pour un masque de taille $(2h_x + 1) \times (2h_y + 1)$, on a



$$(f * h)(i, j) = \sum_{k=-h_x}^{+h_x} \sum_{l=-h_y}^{+h_y} f(i - k, j - l) h(k, l)$$

- La valeur transformée au pixel (i, j) dépend des valeurs de son environnement. Cette influence est décrite par le masque H.

- Le masque H est aussi appelé noyau de convolution.
- Ce noyau doit être symétrique pour que le filtre soit à phase nulle.
- Les masques sont une approximation discrète des RI des filtres continus.

Pré-traitements : Convolution Discrète : Implémentation

```

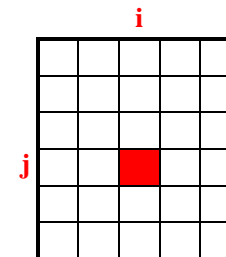
/* Appliquer M à l'image I pour obtenir J */
Image I, J;
float newval, H[2n+1][2m+1]
Pour (i,j) dans l'image {(*)
    newval=0;
    Pour k=-n; k<=n; k++
        Pour l=-m; l<=m; l++
            newval += I[i-k,j-l] H[n+k][m+l]
    J[i,j]=newval;
}

```

(*) ATTENTION !

Pré-traitements : Convolution discrète

$$I'(i, j) = I(i, j) \otimes H(i, j)$$



w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

Centre du masque du filtre

$$\begin{aligned}
 I'(i, j) = & w_9 * I(i-1, j-1) + w_8 * I(i, j-1) + w_7 * I(i+1, j-1) \\
 & + w_6 * I(i-1, j) + w_5 * I(i, j) + w_4 * I(i+1, j) \\
 & + w_3 * I(i-1, j+1) + w_2 * I(i, j+1) + w_1 * I(i+1, j+1)
 \end{aligned}$$

Note: Généralement, masque de dimension impaire et symétrique

Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas

➤ Objectif : réduction du bruit

➤ Origines du Bruit :

- ↪ Contexte d'acquisition
 - Sur ou sous illumination
 - Perturbations des capteurs (température, vieillissement, ...)
 - bougé
- ↪ Capteur
 - Distorsions (géométriques, d'intensité)
- ↪ Echantillonnage
 - Phénomène de Moiré, si les conditions de Nyquist-Shannon ne sont pas vérifiées.
 - Objet dont la taille est égale au pixel : bruit de poivre et sel
- ↪ Nature de la scène
 - Nuages en imagerie satellitaire
 - Images médicales
- ↪ Quantification
 - 256 niveaux de gris : pas gênant pour un utilisateur humain
 - 16 niveaux de gris : faux contours

Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : Exemples de bruits

➤ Mesure du bruit :

- Définition. Le rapport "signal à bruit" (*Signal-to-noise ratio*) est utilisé pour estimer la qualité d'une image I_2 par rapport à une image de référence I_1 . Il est défini par :

$$SNR(I_1/I_2) = 10 \log_{10} \left[\frac{\sigma^2(I_2)}{\sigma^2(I_1 - I_2)} \right], \text{ où } \sigma \text{ est la variance.}$$

- Ordre de grandeur : > 20 = très bonne qualité, < 10 = mauvaise qualité.
- Une mesure utile pour
 - estimer un niveau de bruit connaissant l'image "claire".
 - estimer quantitativement une méthode de suppression de bruit quand on connaît l'image originale.

Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : Exemples de bruits

➤ Bruit « Poivre et Sel »:

- Définition. Un bruit "poivre et sel" d'ordre n est obtenu en ajoutant n pixels blancs et n pixels noirs aléatoirement dans une image. On le caractérise souvent par le pourcentage de pixels remplacés.



Originale

5%

15%

30%

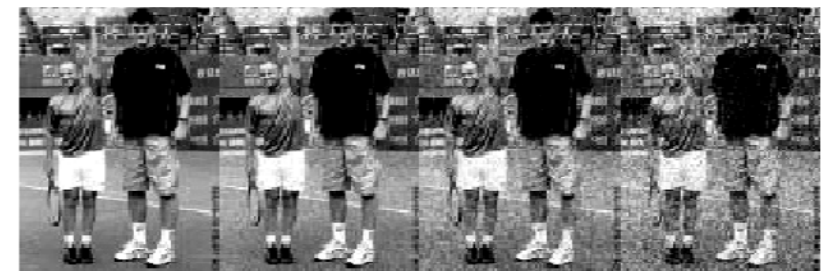
Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : Exemples de bruits

➤ Bruit Gaussien :

- Loi de distribution Gaussienne de variance σ et moyenne μ :

$$G_{\sigma, \mu}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Définition. Le bruit Gaussien est obtenu en ajoutant à chaque pixel une valeur aléatoire suivant une loi de probabilité Gaussienne.

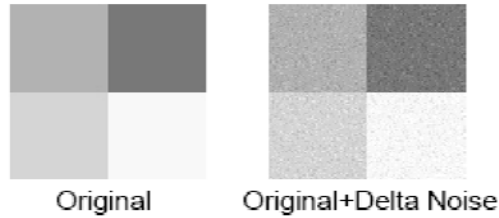


Originale

 $\sigma = 20$ $\sigma = 40$ $\sigma = 60$

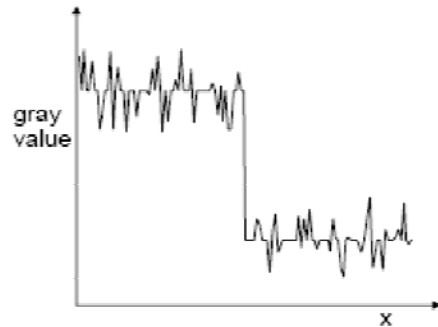
Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : Exemples de bruits

➤ Bruit additif



$$I_{\text{bruit}}(i, j) = (1 + \Delta) \cdot I(i, j)$$

avec $\Delta \in [-\varepsilon; +\varepsilon]$



Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : lissage

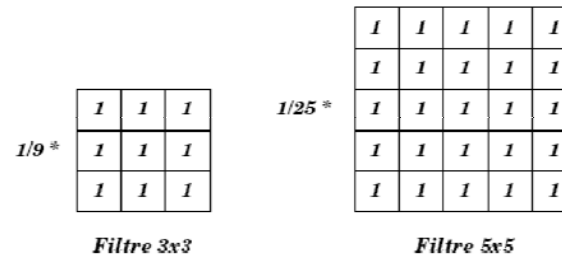
➤ Filtre Moyeneur : Average

* Réponse impulsionnelle:

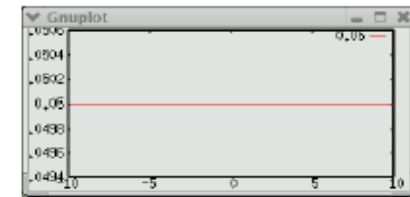
$$h(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \text{si } (x, y) \in [-\lambda/2, +\lambda/2]^2$$

$$h(x, y) = 0 \text{ sinon}$$

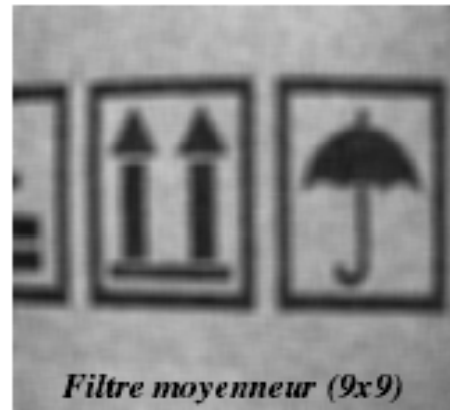
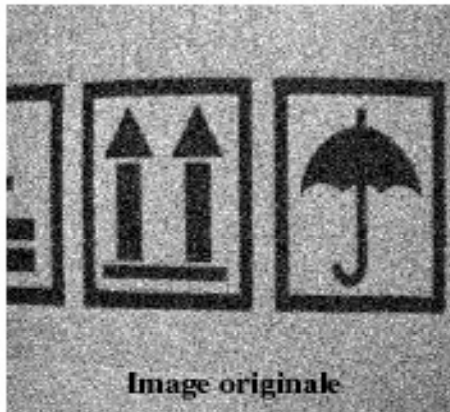
* Exemples de masque de convolution discrets:



* Représentation graphique de la réponse impulsionnelle (en 1d)



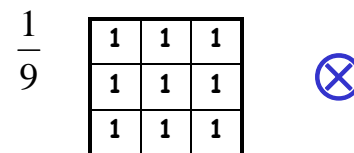
Pré-traitements : Filtre moyeneur : Exemple



* Coefficient de dispersion :

$$\delta = \frac{1}{\lambda^2}$$

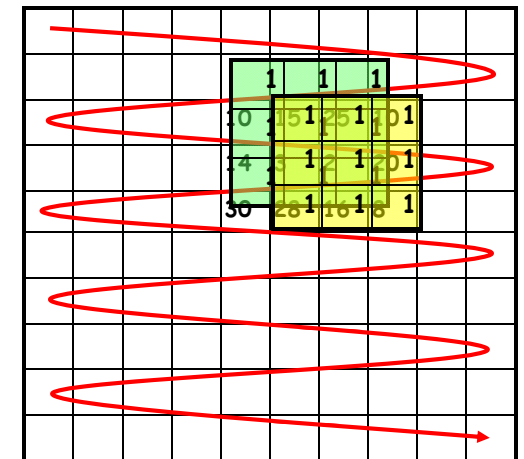
Pré-traitements : Exemple d'application: Average



Masque de convolution (moyenne)

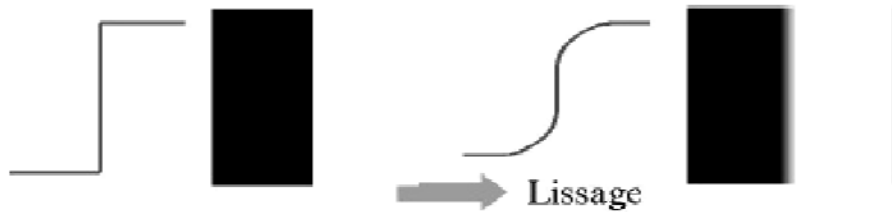
$$(10 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 25 \cdot 1 + 14 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 28 \cdot 1 + 16 \cdot 1) / 9 = 143 / 9$$

$$(15 \cdot 1 + 25 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 28 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 8 \cdot 1) / 9 = 127 / 9$$

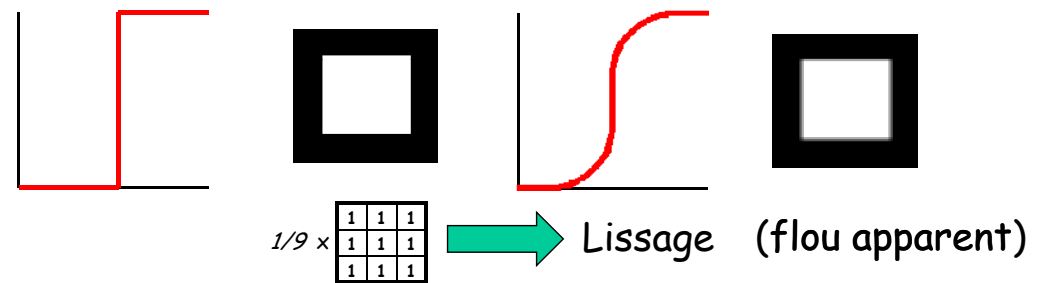


image

Pré-traitements : Filtre moyeneur : Exemple



Pré-traitements : Filtre moyeneur



Plus le filtre grossit, plus le lissage devient important et plus le flou s'accroît !

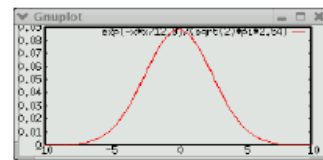
Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : lissage

➤ Filtre gaussien :

* Réponse impulsionnelle:

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

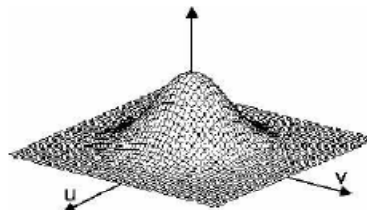
* Représentation graphique de la réponse impulsionnelle (en 1d)



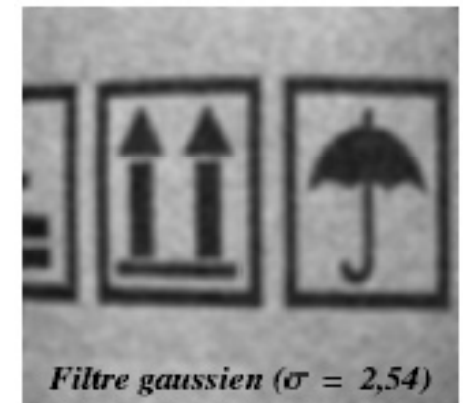
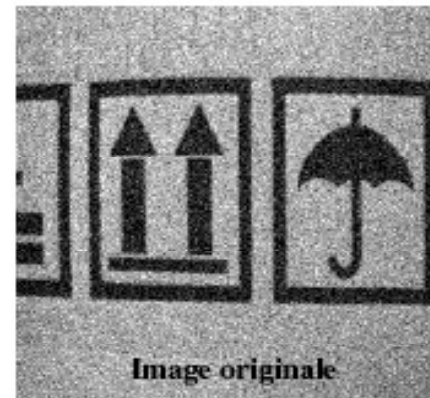
* Exemples de masque de convolution discrets:

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Pré-traitements : Filtre Gaussien : Exemple



* Coefficient de dispersion :

$$\delta = \frac{1}{4\pi\sigma^2}$$

Pré-traitements : Filtre Gaussien : Exemple

➤ Influence du nombre d'application d'un même masque vs taille du masque

- Convolutions itérées par des filtres 3×3



I $I \star M_1$ 50 fois $I \star M_1$ 300 fois

- Convolutions par des Gaussiennes de σ variable



I $I \star G_5$ $I \star G_{25}$

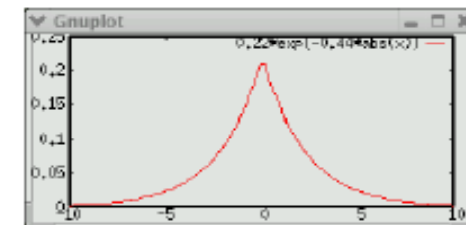
Pré-traitements : Filtrage Passe-Bas : lissage

➤ Filtre exponentiel :

* Réponse impulsionnelle:

$$h(x, y) = \frac{\gamma^2}{4} \exp(-\gamma(|x| + |y|))$$

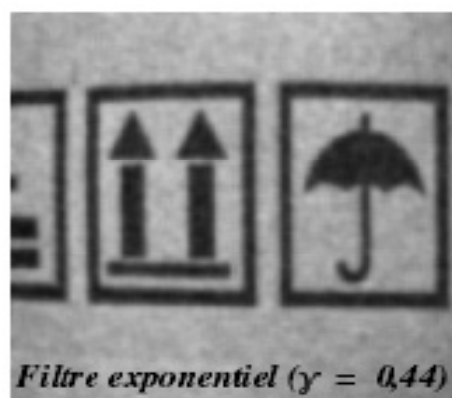
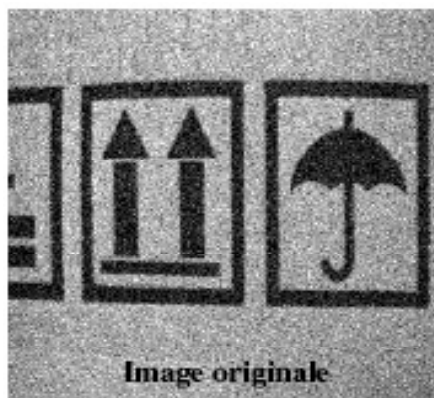
* Représentation graphique de la réponse impulsionnelle (en 1d)



* Exemples de masque de convolution discrets:

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pré-traitements : Filtre Exponentiel : Exemple

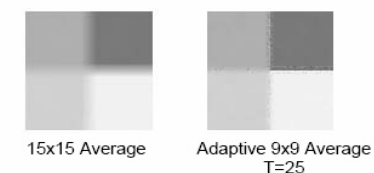
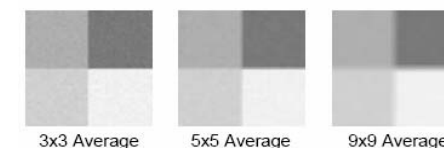
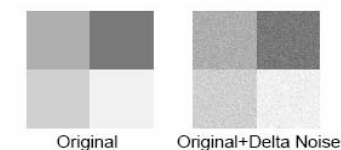


* Coefficient de dispersion :

$$\delta = \frac{\gamma^2}{16}$$

Pré-traitements : Filtre adaptatif

$$I'(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{(n,m) \in S} I(n, m) & \text{Si } \left| \frac{1}{M} \sum_{(n,m) \in S} I(n, m) - I(i, j) \right| < T \\ I(i, j) & \text{Sinon} \end{cases}$$



Avec :
 S = voisinage du pixel (i, j)
 M = nombre de pixels dans le voisinage S
 T = valeur de seuil prédéfinie

Pré-traitements : Filtre directionnel

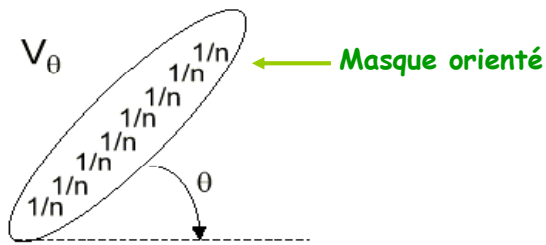
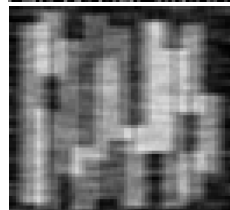
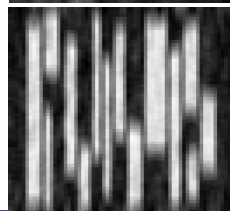


Image bruitée originale



2 x 7



7 x 2

Trouver le voisinage orienté tel que:

$$\theta_0 = \operatorname{argmin}_{\theta} |f(x,y) - f * V_{\theta}(x,y)|$$

Calculer la moyenne (ou autre) suivant V_{θ} :

$$g(x,y) = f * V_{\theta_0}(x,y)$$

Pré-traitements : Filtrage Passe-haut

Objectifs :

Mettre en avant les détails de l'image, les variations brutales d'intensité.

↳ Filtres Passe haut

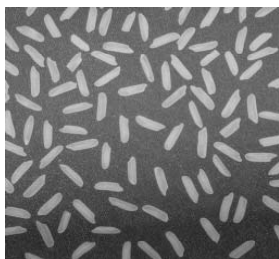
↳ Filtres Différentiels : détection de contours

- Types de contours
- Dérivée première : Gradient
- Dérivée seconde : Laplacien

↳ Rehaussement du contraste

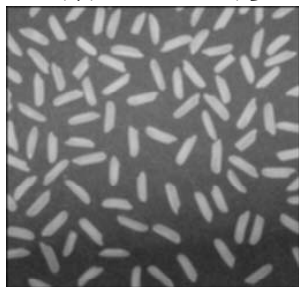
Pré-traitements : Filtre passe-haut

$$I_{PH} = I - I_{PB} \quad (+128)$$



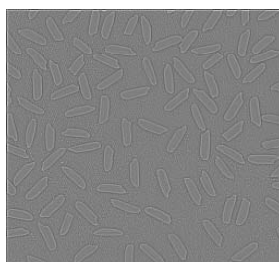
Image

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Passe-bas

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Passe-haut

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

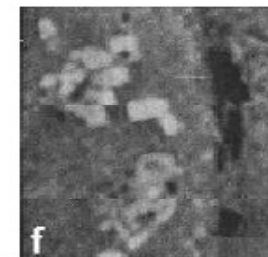
Pré-traitements : Filtrage passe haut

Filtre « high Boost » : $K \cdot f(x,y) - \text{PasseBas}(f(x,y))$
 $K = 1$: Passe haut $K > 1$ rehaussement de contraste

$$\begin{aligned} g(x,y) &= Kf(x,y) - f(x,y) * h(x,y) \\ &= (K-1)f(x,y) + (f(x,y) * \delta(x,y)) - f(x,y) * h(x,y) \\ &= (K-1)f(x,y) + f(x,y) * (\delta(x,y) - h(x,y)) \\ &\stackrel{\uparrow \mathcal{F}}{=} G(u,v) = (K-1)F(u,v) + F(u,v) \underbrace{[1 - H(u,v)]}_{\text{Passe-haut}} \end{aligned}$$



a

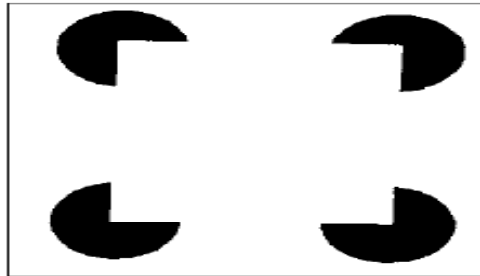
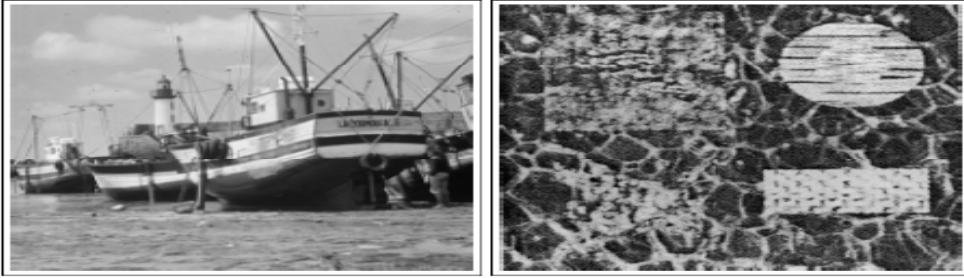


f



g

Pré-traitements : Qu'est ce qu'un contour ?

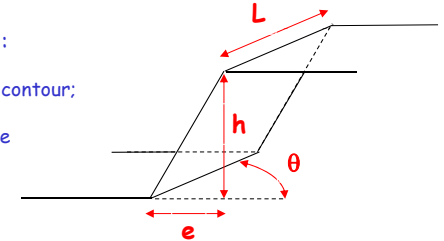


Pré-traitements : Notion de Contours

➤ Définitions :

- Les contours se caractérisent les discontinuités de la fonctions d'intensité de l'image.
- Ils proviennent des discontinuités de la fonction de réflectance (ombre, texture) ou des discontinuités de profondeur (bord d'objets)

- Les paramètres caractérisant le contour sont :
 - son orientation θ par rapport à un axe de l'image;
 - son épaisseur e , mesurée perpendiculairement au contour;
 - sa longueur L , mesurée le long du contour;
 - sa hauteur h exprimant la différence de luminance entre le niveau haut et le niveau bas.



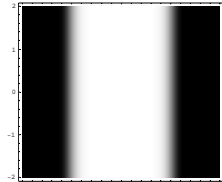
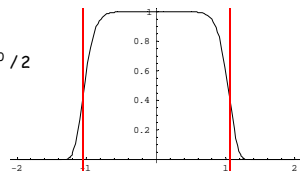
➤ 3 types de contours :

- Discontinuité d'ordre 0 :
 - Contours en « marche d'escalier »
- Discontinuité d'ordre 1
 - Contours en toit
 - Contours en pointe

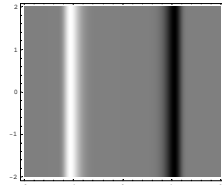
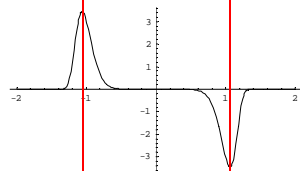


Pré-traitements : Filtres différentiels

$$f(x, y) = e^{-x^{10}/2}$$

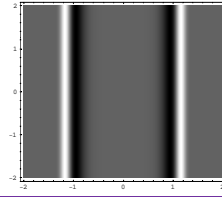
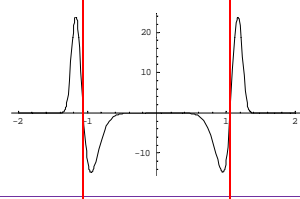


$$\frac{\partial f}{\partial x}$$



Dérivée première

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

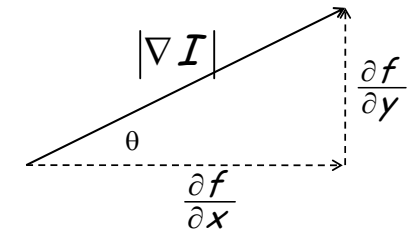


Dérivée seconde

Pré-traitements : Approche par le gradient

Gradient

$$\nabla I = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{bmatrix}$$



Module

$$|\nabla I| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} \approx \left|\frac{\partial I}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|$$

Orientation

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial x}} \right)$$

Pré-traitements : Approximation du Gradient

Approximation en x par différence finie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x} \approx \frac{I(x+1,y) - I(x-1,y)}{2}$$

$\Delta_x = 1$ ► Masque de convolution ►

1	0	-1
---	---	----

$$\text{ou } \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(x-h,y)}{h} \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x} \approx I(x,y) - I(x-1,y)$$

$\Delta_x = 1$ ► Masque de convolution ►

1	-1
---	----

 ou

-1	1
----	---

Approximation en Y:

Masque de convolution ►

1
-1

 ou

-1
1

 ou

-1	0	1
----	---	---

 ou

1	0	-1
---	---	----

Pré-traitements : Le gradient (version élémentaire 3 x 3)

Image Origine

I_1	I_2	I_3
I_4	I_5	I_6
I_7	I_8	I_9

où I_x : valeur du niveau de gris

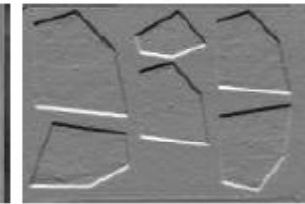
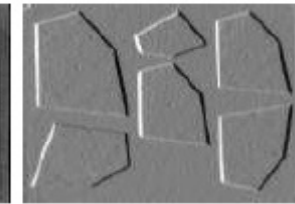
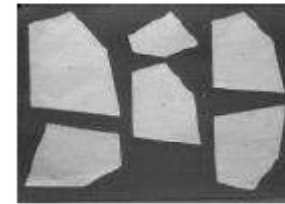
Calculs

$$\frac{\partial f}{\partial x} = [I_6 - I_4] \quad \frac{\partial f}{\partial y} = [I_8 - I_2]$$

Masques à somme nulle

0	0	0
-1	0	1
0	0	0

0	-1	0
0	0	0
0	1	0



Pré-traitements : Masques classiques

Opérateur de Roberts:

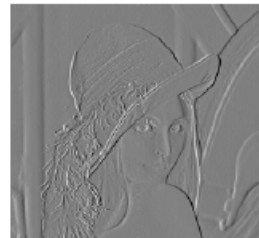
$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x,y) - f(x-1,y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x-1,y) - f(x,y-1)$$

Masques correspondants :

1	0
0	-1

0	1
-1	0

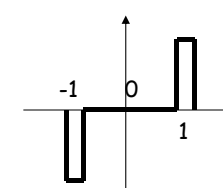
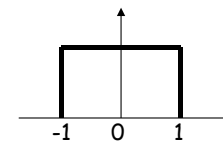


$\frac{\partial I}{\partial x}$

Pré-traitements : Masques classiques

Opérateur de Prewitt:

↳ Dérivée d'un opérateur de lissage de type moyeneur



↳ Masque à phase nulle : contours centrés

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

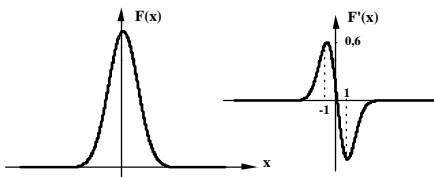


Pré-traitements :

Masques classiques

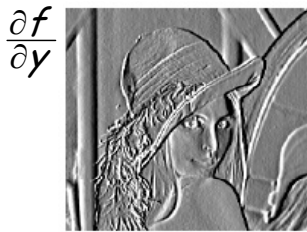
Opérateur de Sobel:

↳ Dérivée d'un opérateur de lissage de type Gaussien



-1	-2	-1	-1	0	1
0	0	0	-2	0	2
1	2	1	-1	0	1

$$\nabla f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$



Pré-traitements :

Filtres séparables

Si la matrice de convolution est séparable :

Alors : $h[x, y] = h_{col}[x] \cdot h_{lig}[y]$

$$\begin{aligned} \text{Et : } (I * h)[x, y] &= \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} h[i, j] \cdot I[x-i, y-j] \\ &= \sum_{i=x_1}^{x_2} h_{col}[i] \sum_{j=y_1}^{y_2} h_{lig}[j] \cdot I[x-i, y-j] \end{aligned}$$

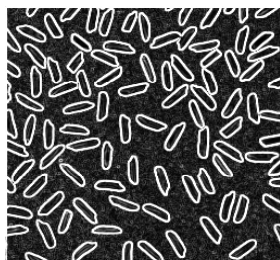
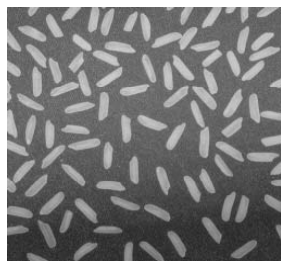
Exemple de séparation sur le noyau de Sobel :

$$h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D(y) * S(x) \text{ avec } D(y) = [1, 2, 1]^T \text{ et } S(x) = [-1, 0, 1]$$

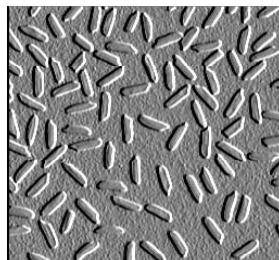
→ Lissage en y et dérivée en x : moins sensible au bruit

Pré-traitements :

Exemple (Sobel)



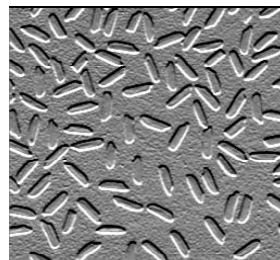
$$\nabla f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

+128 pour affichage



$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

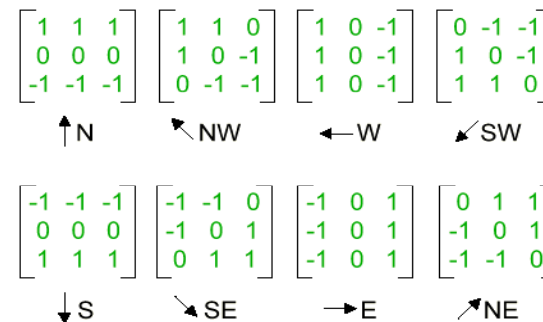
-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

+128 pour affichage

Pré-traitements :

Autres Détection de contours

➤ filters compas



$$g(x,y) = \max_k g_k(x,y)$$

Note: Le choix de k donne l'orientation du gradient

Pré-traitements : Autres Détection de contours

➤ Opérateurs de Kirch

-3	-3	5	-3	-3	-3	-3	-3	-3	5	5	-3
-3	0	5	-3	0	-3	5	0	-3	5	0	-3
-3	-3	5	5	5	5	5	5	-3	-3	-3	-3

➤ Filtre directionnel :

↪ Précision de l'orientation du contours

↪ coût d'implantation élevé

Pré-traitements : Approche par le Laplacien ($\nabla^2 f$)

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \approx I_x(x+1, y) - I_x(x, y) + I_y(x, y+1) - I_y(x, y)$$

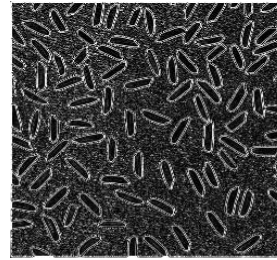
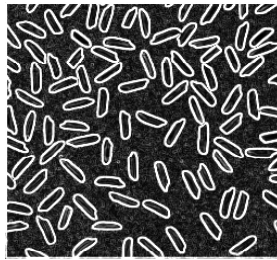
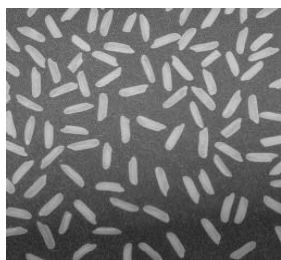
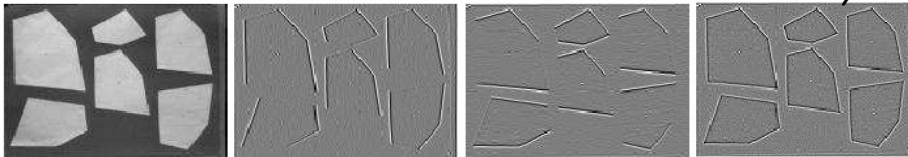
$$\begin{aligned} \nabla^2 I &\approx [I(x+1, y) - I(x, y)] - [I(x, y) - I(x-1, y)] \\ &\quad + [I(x, y+1) - I(x, y)] - [I(x, y) - I(x, y-1)] \\ \nabla^2 I &\approx [I(x+1, y) - 2I(x, y) + I(x-1, y)] + [I(x, y+1) - 2I(x, y) + I(x, y-1)] \end{aligned}$$

$$\nabla^2 I \approx \text{Filtre avec } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{autre forme en 8-voisinage : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pré-traitements : Laplacien ($\nabla^2 f$)

Image Origine $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$ $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$



Sobel

Laplacien $|\nabla^2 f|$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pré-traitements : Filtre de Marr-Hildreth

➤ Laplacien de Gaussienne :

- ↪ On filtre d'abord l'image avec un filtre Gaussien G
- ↪ Puis on prend le Laplacien de l'image filtrée

$$\nabla^2(G \otimes f) = \nabla^2 G \otimes f$$

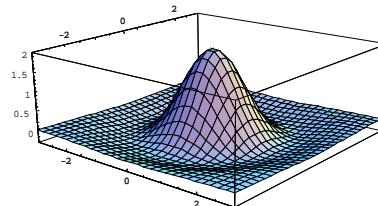
$\nabla^2 G$

➤ Le but est de réduire le bruit associé aux filtres différentiels

$$\text{Filtre gaussien : } G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

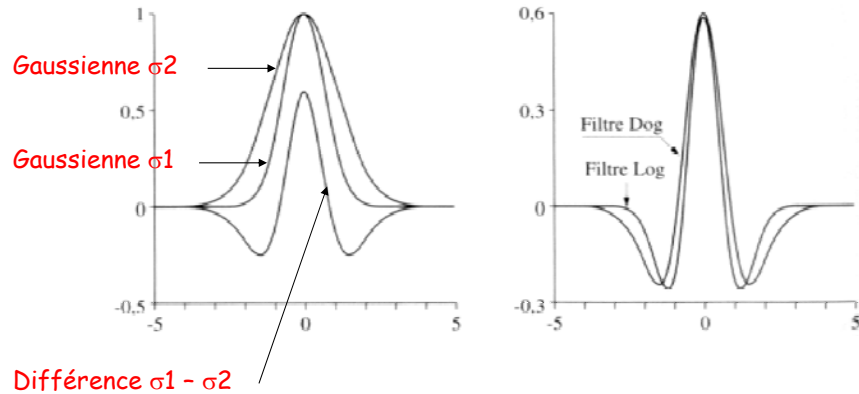
$$\text{Dérivée seconde : } \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\text{LoG : } \nabla^2 G_\sigma(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \cdot G_\sigma(x, y)$$



Pré-traitements : Filtre DOG (Difference of Gaussian)

➤ Filtre DOG très proche du LOG



Pré-traitements : Filtrage Optimal

➤ Critères de Canny :

- ↳ Détection : minimiser les fausses réponses : max SNR
- ↳ Localisation : minimiser la distance entre les points détectés et le vrai contour
- ↳ Unicité : minimiser le nombre de réponse pour un seul contour

$$h(x) = a_1 e^{\alpha x} \cos(\omega x) + a_2 e^{\alpha x} \sin(\omega x) + a_3 e^{-\alpha x} \cos(\omega x) + a_4 e^{-\alpha x} \sin(\omega x).$$

➤ Equations de récurrence du filtre de DERICHE :

↳ y = entrée filtrée ; x = entrée

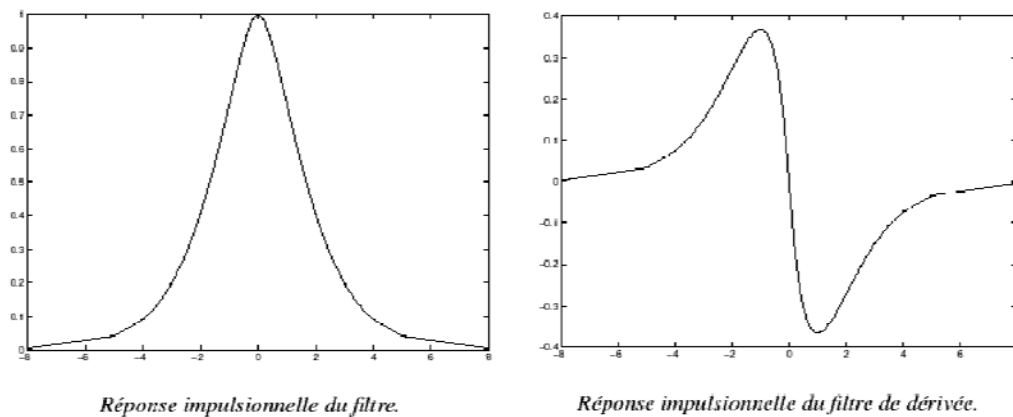
$$y^+(m) = a x(m-1) - b_1 y^+(m-1) - b_2 y^+(m-2) \quad m = 1..N$$

$$y^-(m) = -a x(m+1) - b_1 y^-(m+1) - b_2 y^-(m+2) \quad m = N..1$$

$$y(m) = y^+(m) + y^-(m) \quad m = 1 .. N$$

avec $a = -c e^{-a \sin w}$ $b_1 = -2 e^{-a \cos w}$ $b_2 = e^{-2a}$

Pré-traitements : Filtre de Canny-Deriche



➔ Lissage puis dérivée : moins sensible au bruit

Pré-traitements : Rehaussement de contraste

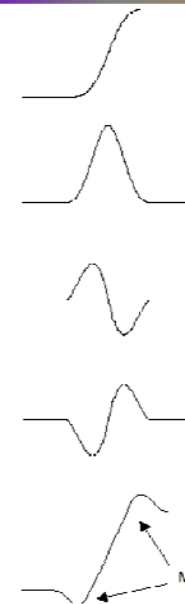
Edge Image $f(x)$

1st derivative $\frac{\partial f}{\partial x}$

2nd derivative (Laplacian) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$f(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$



0	0	0
0	1	0
0	0	0

Ex :

0	0	0
-1	0	1
0	0	0

Ex :

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Ex :

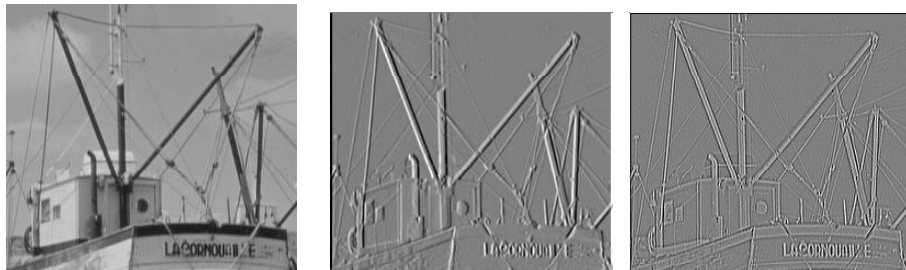
0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

Ex :

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0



Pré-traitements : Rehaussement de contraste



0	0	0
0	1	0
0	0	0

0	0	0
-1	0	1
0	0	0

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

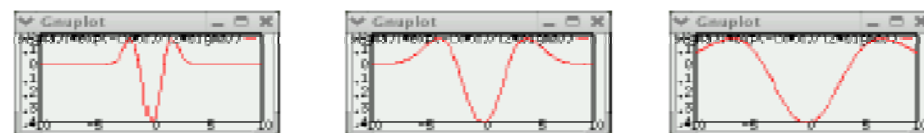
Utilisé dans la plupart des caméras numériques, vidéos photocopieurs...



Pré-traitements : Influence de l'échelle

➤ Contraste : Notion Multi-échelle :

$$G_f[x, y] = f[x, y] - \gamma \cdot \Delta f[x, y] \quad (\gamma : \text{gain})$$



↪ Mécanisme de préservation de l'échelle

Pré-traitements : Filtres Non linéaires

➤ Non-linéarité :

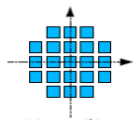
↪ Les coefficients du masque ne sont pas indépendants de l'image

➤ Filtres d'ordre

↪ Médian

↪ Erosion Morphologique - Dilatation Morphologique

➤ Les filtres d'ordres procèdent en remplaçant les valeurs de chaque pixel par la valeur qui occupe un certain rang lorsqu'on trie les valeurs observées dans un certain voisinage du pixel.

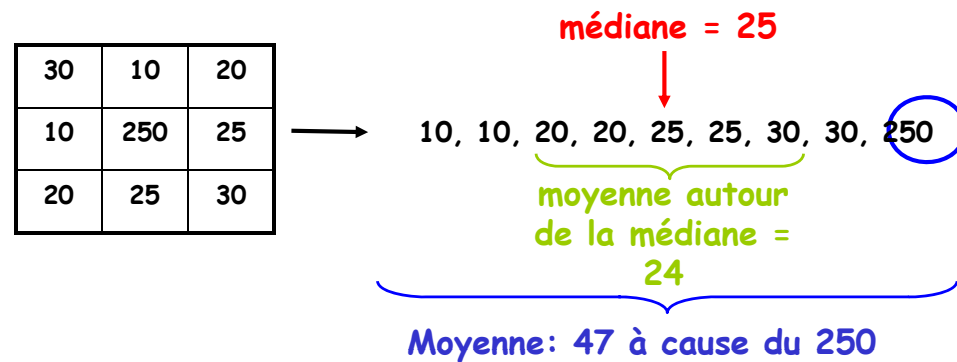


les valeurs dans le voisinage de (x, y) : $V(x, y) = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$
 Soit $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ permutation de $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ telle que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_N$
 alors le filtre d'ordre de rang k est défini par : $\rho_k[x, y] = b_k$
 Pour $k=N/2$, on parle de filtre médian, pour $k=1$, d'érosion morphologique, pour $k=N$, de dilatation morphologique.

La forme qui définit le voisinage est appelé élément structurant.

Pré-traitements : Filtre Non linéaire : Médian

➤ Principe de calcul :



↪ Particulièrement utile pour un bruit de type Poivre & Sel (0 et 255)

Pré-traitements : Filtre Non linéaire : Médian



Image initiale



Bruit Poivre & Sel



Moyenne V8



Min V8

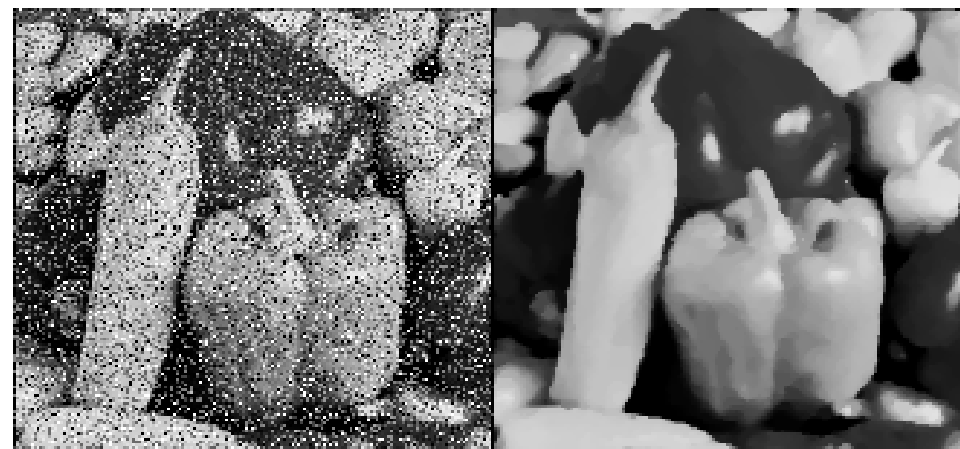


Max V8



Médian V8

Pré-traitements : Filtre Non linéaire : Médian

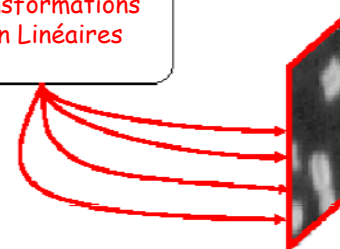
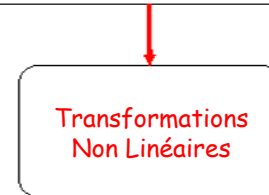
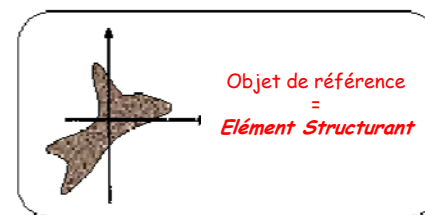


Pré-traitements : Morphologie Mathématique

➤ Généralités :

- ☞ La Morphologie Mathématique a été développée à l'origine à l'École des Mines de Paris. Elle repose essentiellement sur les travaux de G. Matheron effectués dans les années 60-70, puis sur ceux de J. Serra (1980) et de son équipe.
- ☞ La Morphologie Mathématique est une théorie essentiellement **non linéaire**, utilisée en particulier en analyse d'images, dont le but est l'étude des objets en fonction de leur **forme**, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur.
- ☞ Par les transformations qu'elle propose, elle se situe à différents niveaux du traitement d'images (filtrage, segmentation, mesures, analyse de texture)
- ☞ Contrairement aux traitements linéaires des images, la Morphologie Mathématique ne s'appuie pas sur le traitement du signal, mais repose sur la « *Théorie des Ensembles* ».
- ☞ Les transformations de la Morphologie Mathématique sont faites pour travailler sur des images binaires (0: noir ; 1: Blanc) avec des objets blancs sur fond noir

Pré-traitements : Morpho Math : Principes

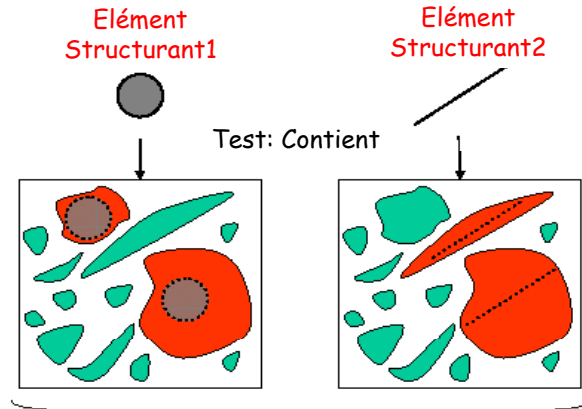


Extraire des informations de l'image à partir de réponses à des tests : **Transformations**

- Taille
- Forme
- Orientation
- Connexité
- ...

Pré-traitements : Morpho Math : Principes

Exemple



Taille, Forme, Orientation, ...
↓ ↓ ↓
Analyse Quantitative, Spatiale, ...

Pré-traitements : Morpho Math : Structure Fondamentale

➤ Dans le cas des traitements linéaires :

- ↪ la structure fondamentale est **l'Espace Vectoriel E**
- ↪ Les opérateurs de base sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base
 - Isomorphismes d'espace vectoriel : **Convolutions**

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2: f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

➤ Dans le cas de la Morphologie Mathématique:

- ↪ la structure fondamentale est **le Treillis Complet**

(1) Ensemble ordonné (E, \leq)

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet : $\begin{cases} \bullet \text{ une borne sup} \\ \bullet \text{ une borne inf} \end{cases}$

Sup (Supremum) : plus petit des majorants : $\vee P$
Inf (Infimum) : plus grand des minorants : $\wedge P$

Pré-traitements : Exemple de Treillis

Treillis des formules booléennes

• **éléments :** formules booléennes f, g, h

• **relation d'ordre :** implication $f \rightarrow g$

• **sup :** OU logique

• **inf :** ET logique

• **éléments extrêmes :**



Treillis ensembliste

• **éléments :** les parties d'un ensemble S

• **relation d'ordre :** inclusion \subseteq

• **sup :** Union \cup

• **inf :** Intersection \cap

• **éléments extrêmes :**



Treillis des nombres

• **éléments :** nombres réels (ou nombres entiers)

• **relation d'ordre :** \leq (ordre total)

• **sup :** max

• **inf :** min

• **éléments extrêmes :**



Pré-traitements : Propriétés des opérateurs morphologiques

➤ Croissance :

- ↪ Une transformation Φ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est
 - **croissante** si : $\forall (X, Y) \in E^2, X \leq Y \Rightarrow \Phi(X) \leq \Phi(Y)$

➤ Extensivité et anti-extensivité :

- ↪ Une transformation Φ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est
 - **Extensive** si : $\forall X \in E \Rightarrow X \leq \Phi(X)$
 - **Anti-extensive** si : $\forall X \in E \Rightarrow X \geq \Phi(X)$

➤ Idempotence :

- ↪ Une transformation Φ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est
 - **idempotente** si : $\forall X \in E \Rightarrow \Phi(\Phi(X)) = \Phi(X)$

➤ Dualité :

- ↪ Deux transformations Φ et Ψ sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ sont
 - **duales** si : $\forall X \in E \Rightarrow \Psi(X^c) = [\Phi(X)]^c$

où X^c désigne le complémentaire de X dans E soit $X^c = E \setminus X$
avec \setminus la Différence Ensembliste Symétrique : $E \setminus X = (E \cup X) - (E \cap X)$

L'opérateur de complémentation réalise une **involution**

Pré-traitements : Exemple d'Involutions

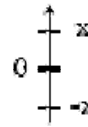
Treillis des formules booléennes

NON logique :

x	$\neg x$
0	1
1	0

Treillis des nombres

opposé :



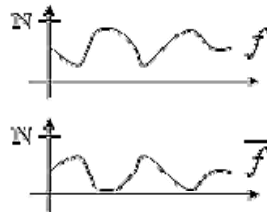
Treillis ensembliste

Complémentaire :



Treillis des fonctions dans [0,N]

$$\bar{f} = N - f$$



Pré-traitements : Morpho Math : Opérateurs de base



X



Y



X^c (NOT X)



$X \cap Y$ (X ET Y)



$X \cup Y$ (X OU Y)

Pré-traitements : Morpho Math : Différence Symétrique

➤ Définition : $Y \setminus X = (Y \cup X) - (Y \cap X)$



Y

X

$X \setminus Y$ (X XOR Y)

➤ Propriétés :

- ↪ Associative, possède un élément neutre (\emptyset) et commutative $Y \setminus X = X \setminus Y$
- ↪ Pas le cas de la différence ensembliste classique :



$Y \setminus X$

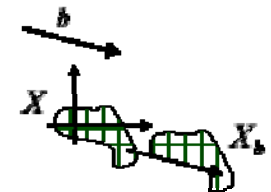
$X \setminus Y$

Pré-traitements : Morpho Math : algèbre de Minkowski

➤ Translaté :

↪ Pour $X \subset \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^n$:

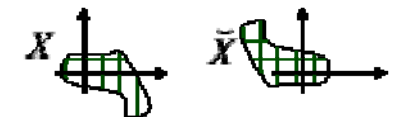
$$\bullet X_b = \{x + b ; x \in X\}$$



➤ Transposé :

↪ Pour $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\bullet \tilde{X} = \{-x ; x \in X\}$$



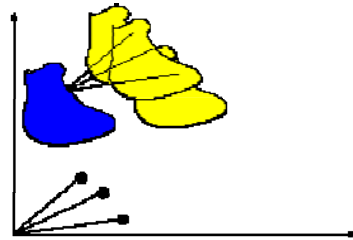
➤ Addition de Minkowski:

↳ Pour $(X, B) \subset \mathbb{R}^n$:

• $X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b =$ **Union des translatés de X par les éléments de B**

↳ Propriétés :

- Commutative : $X \oplus B = B \oplus X$
- Associative, Croissante.
- $X \oplus \{b\} = X_b$



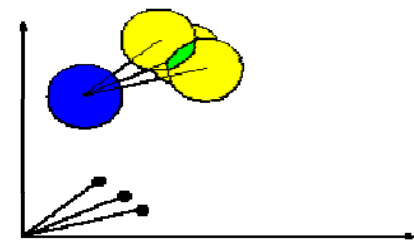
➤ Soustraction de Minkowski:

↳ Pour $(X, B) \subset \mathbb{R}^n$:

• $X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b =$ **Intersection des translatés de X par les éléments de B**

↳ Propriétés :

- Non Commutative : $X \ominus B \neq B \ominus X$
- Associative, Croissante.
- $X \ominus \{b\} = X_b$



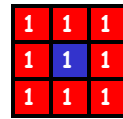
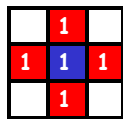
➤ La Morphologie Mathématique correspond à la transformation d'une image binaire par un ensemble fixé, appelé :

Élément Structurant

➤ Pour une transformation donnée, l'image finale est obtenue en translatant l'élément structurant sur l'image origine contenant un objet et en examinant si la relation entre l'objet et l'élément structurant est vérifiée.

↳ Mise en évidence de propriétés locales

➤ L'élément structurant élémentaire dépend de la maille utilisée. Sur une maille carrée, on trouve deux éléments structurant élémentaire en fonction du voisinage choisi :

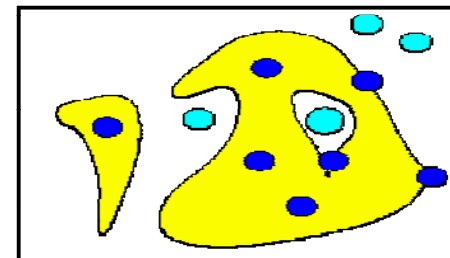


➤ L'élément Structurant a une Taille : λ et une origine o . L'origine de l'élément structurant est appelé **Centre**.

➤ Effectuer une transformation de Taille n correspond à utiliser un élément structurant de taille n ou à appliquer n fois la même transformation de taille 1

➤ La dilataion morphologique d'un ensemble X par B est définie comme l'addition de Minkowski de X avec le Transposé de B par rapport à son centre :

$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= X \oplus \check{B} = \{x + y / x \in X, y \in \check{B}\} \\ &= \bigcup_{x \in X} \check{B}_x \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / B_x \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$



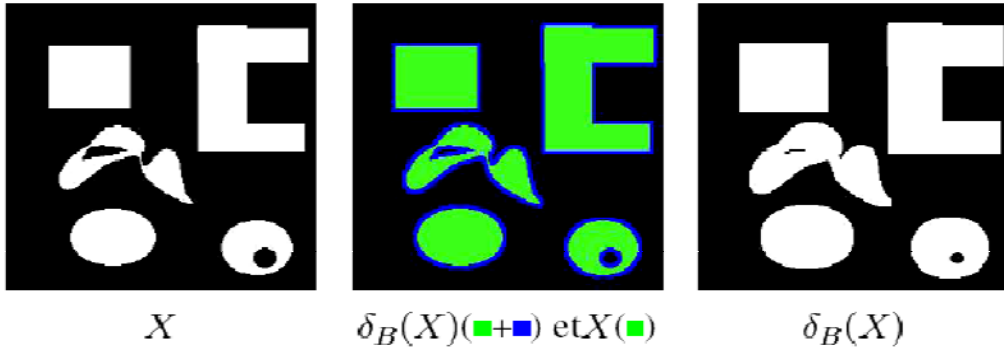
● reponse negative
 ● reponse positive

Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

Exemple :

Si l'élément structurant est symétrique, la dilatation revient à l'addition de Minkowski

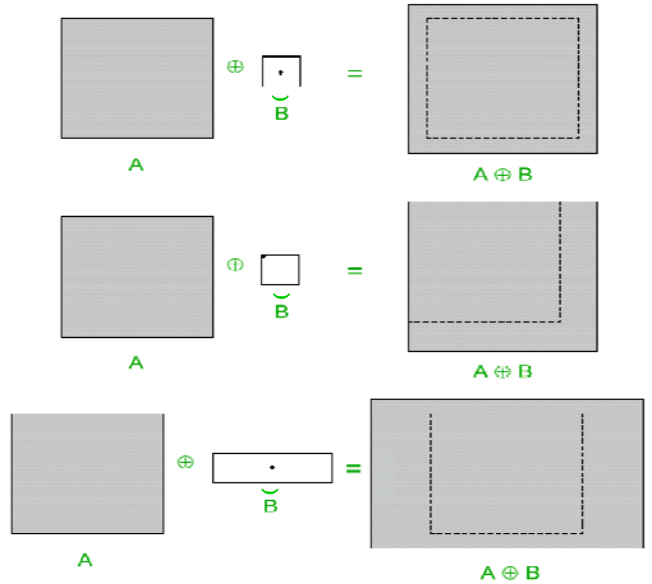
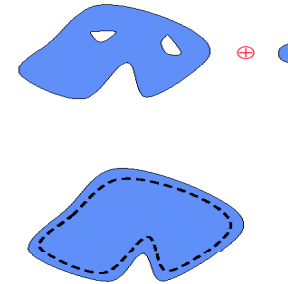
■ B = ■



Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

Note: Max (si l'objet est blanc (1 ou 255) et le fond est noir (0))

C-à-d que si un seul pixel de l'objet est sous l'élément structurant alors le centre de ES devient élément de l'objet



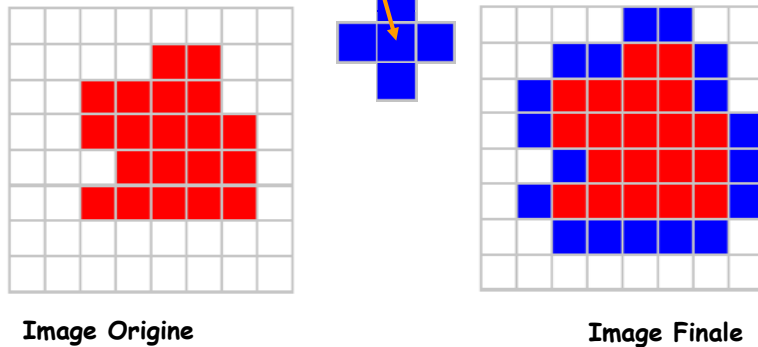
Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

Exemples d'application:

Dilaté :

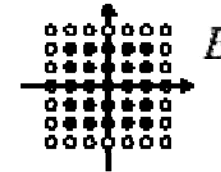
Pour chaque position de B, est-ce que l'intersection entre B et l'objet A est non vide ? Si oui, x l'origine de B appartient à l'image dilatée

Elément structurant de centre et de taille $\lambda = 1$



Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

Elément Structurant carré de côté C

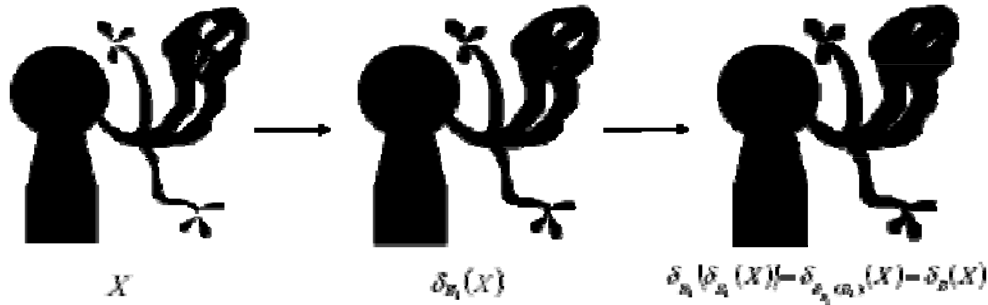
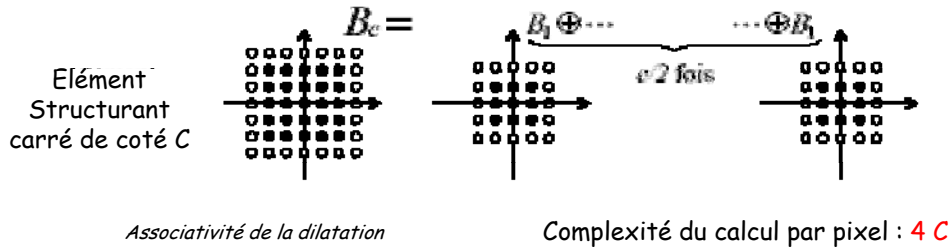


DILATATION (X,Y,B)
 { Pour tout pixel p de X
 { Y(p) = 0;
 Pour tout b ∈ B
 Y(p) = Y(p) OU X(p - b);
 }
 }



Complexité du calcul par pixel : C^2

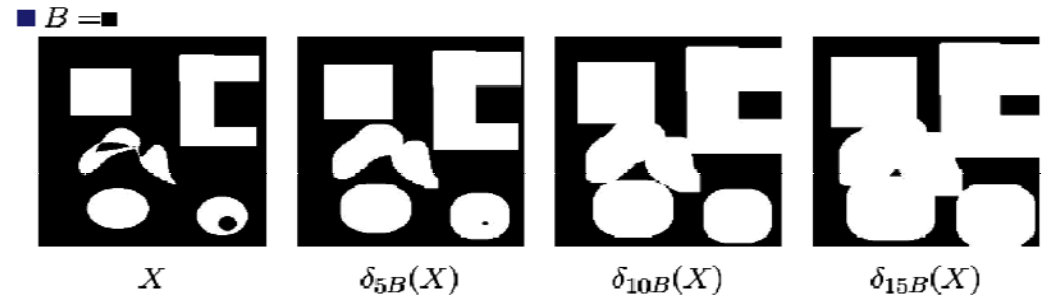
Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation



Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation

➤ Dilatation avec des éléments de taille croissante :

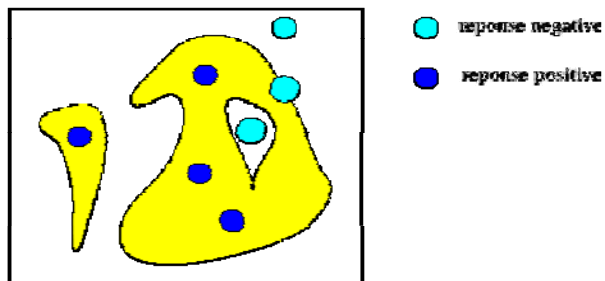
- ↪ La taille des objets augmente,
- ↪ Les trous et les concavités peuvent être bouchés,
- ↪ Les objets voisins peuvent se connecter,
- ↪ Des petits détails disparaissent.



Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

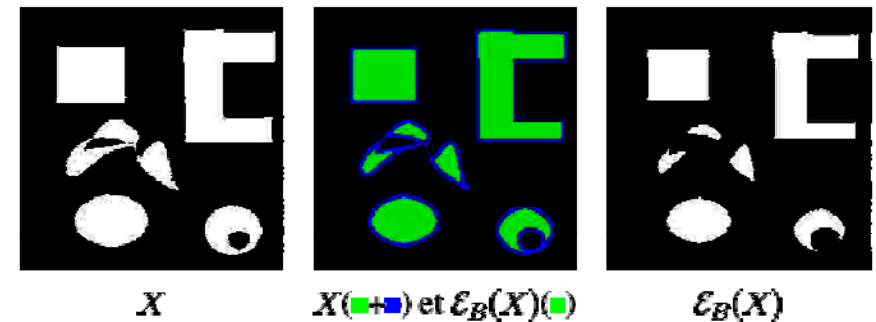
- L'érosion morphologique d'un ensemble X par B est définie comme la soustraction de Minkowski de X avec le Transposé de B par rapport à son centre :

$$\begin{aligned} \varepsilon_B(X) &= X \ominus \check{B} &&= \{x / \forall y \in B, x + y \in X\} \\ & &&= \{x \in \mathbb{R}^n / B_x \subset X\} \\ & &&= [\delta_B(X^C)]^C \end{aligned}$$



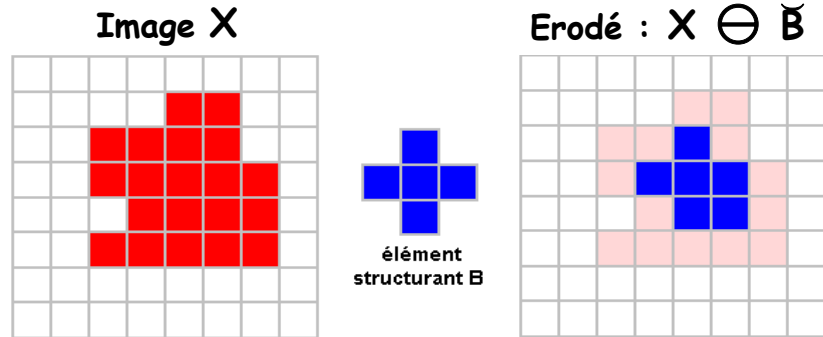
Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

■ $B = \blacksquare$ (rayon 3)



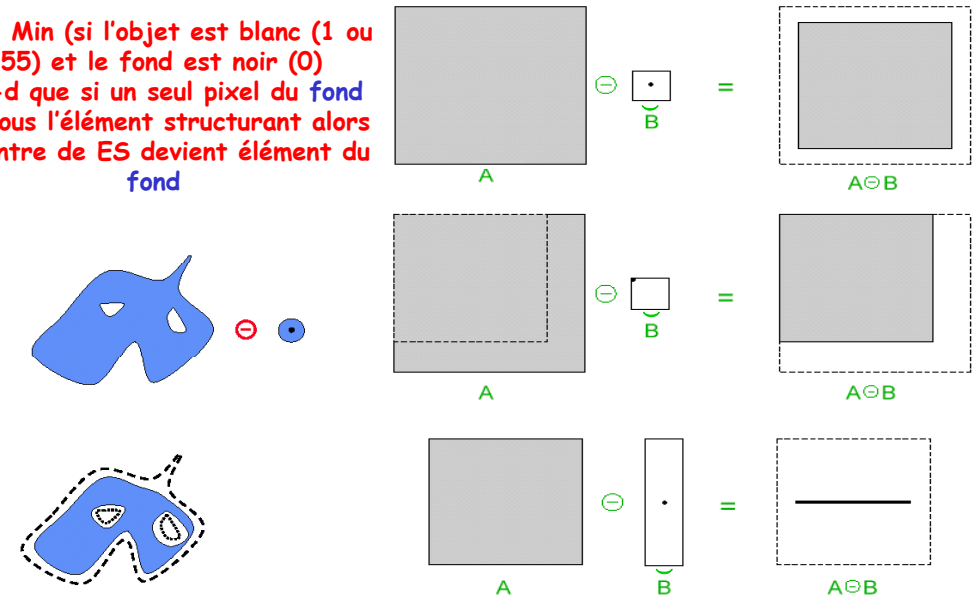
Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

- Soit B un élément structurant
- $Bx \rightarrow$ élément centré en un pixel x
- Erodé = On positionne l'origine de B en chaque pixel x de l'objet A : Si tous les pixels de B font partie de l'objet A , alors l'origine de B appartient à l'érodé

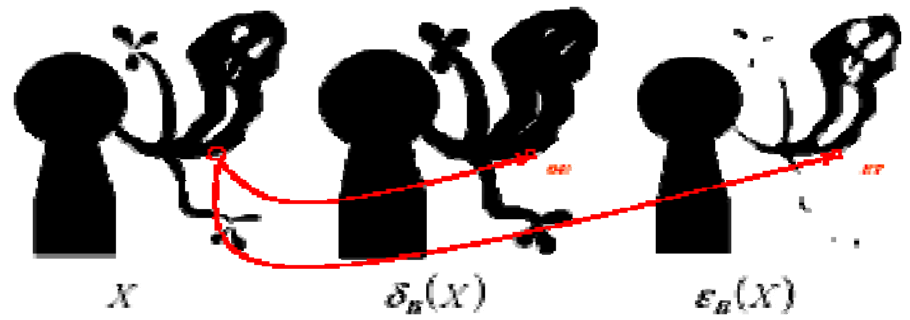
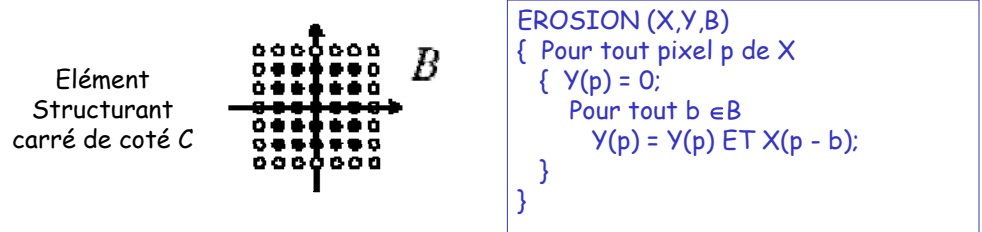


Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

Note: Min (si l'objet est blanc (1 ou 255) et le fond est noir (0))
 C-à-d que si un seul pixel du fond est sous l'élément structurant alors le centre de ES devient élément du fond

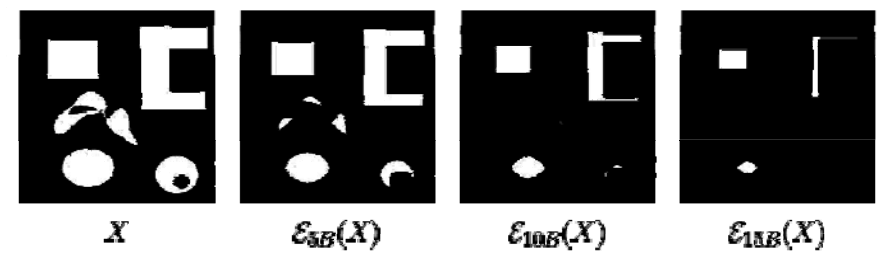


Pré-traitements : Morpho Math : Erosion



Pré-traitements : Morpho Math : Erosion

- Erosion avec des éléments de taille croissante :
 - ↪ La taille des objets décroît,
 - ↪ Un objet avec des concavités ou des trous peut être divisés en plusieurs,
 - ↪ Les petits objets et les détails disparaissent.



Pré-traitements : Morpho Math : Ouverture

- L'ouverture morphologique d'un ensemble X par B est définie comme composition d'une érosion et d'une dilatation :

$$\gamma_B(X) = (X \ominus \check{B}) \oplus \check{B}$$

- L'ouverture est:

↪ anti-extensive, Croissante, Idempotente

↪ **Filtre morphologique**

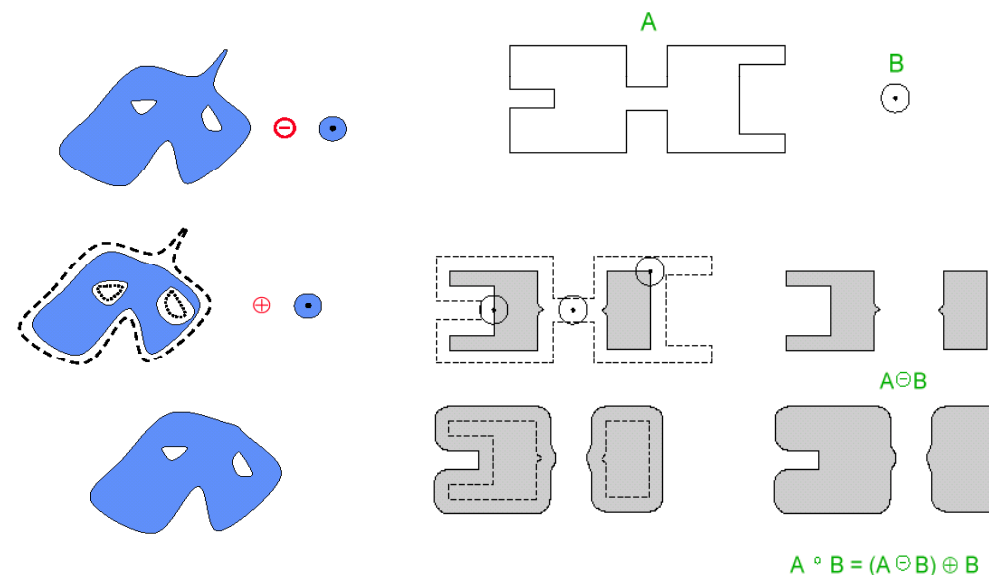


Vendredi 11 Septembre 2015

Vincent Bombardier

1125

Pré-traitements : Morpho Math : Ouverture



Vendredi 11 Septembre 2015

Vincent Bombardier

1126

Pré-traitements : Morpho Math : Fermeture

- La fermeture morphologique d'un ensemble X par B est définie comme composition d'une dilatation et d'une érosion :

$$\phi_B(X) = (X \oplus \check{B}) \ominus \check{B} = [\gamma_B(X^c)]^c$$

- La Fermeture est:

↪ Extensive, Croissante, Idempotente

↪ **Filtre morphologique**

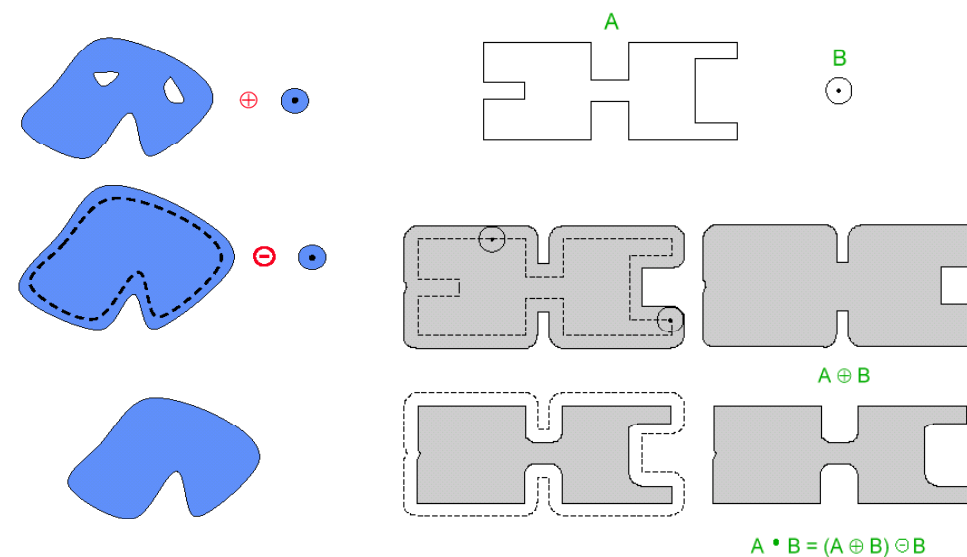


Vendredi 11 Septembre 2015

Vincent Bombardier

1127

Pré-traitements : Morpho Math : Fermeture

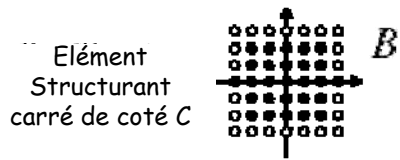


Vendredi 11 Septembre 2015

Vincent Bombardier

1128

Pré-traitements : Morpho Math : Fermeture vs Ouverture

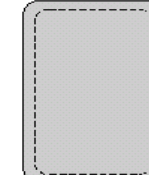
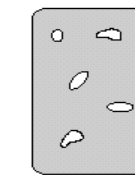
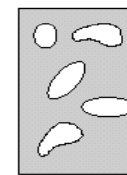
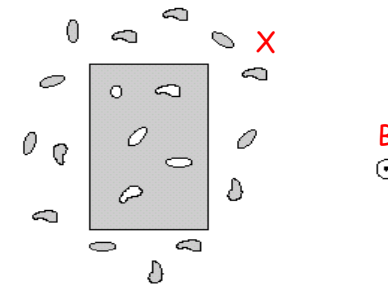


➤ L'ouverture élimine les petites composantes et ouvre les petits isthmes.

➤ La fermeture bouche les petits trous et ferme les petits détroits.



Pré-traitements : Filtrage Morphologique



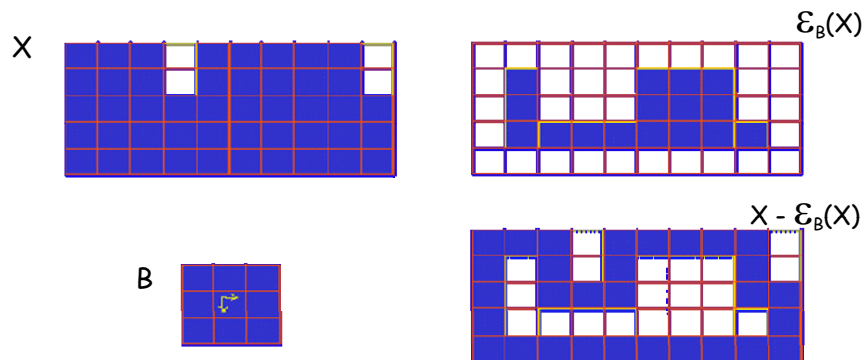
Pré-traitements : Gradient Morphologique

➤ Le gradient morphologique est défini comme la différence :

↪ Gradient interne: $\nabla_B^- = X - \varepsilon_B(X)$

↪ Gradient externe: $\nabla_B^+ = \delta_B(X) - X$

↪ Gradient morphologique: $\nabla_B^+ + \nabla_B^- = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$



Pré-traitements : Gradient Morphologique

➤ Gradient interne : contour intérieur: $\nabla_B^- = X - \varepsilon_B(X)$

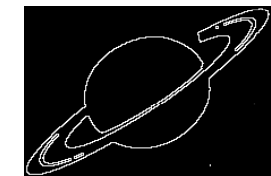


Image originale - Image érodée = Contour intérieur

➤ Gradient externe : contour extérieur: $\nabla_B^+ = \delta_B(X) - X$



Image dilatée - Image originale = Contour extérieur

Pré-traitements : Gradient Morphologique

➤ Gradient Morphologique : $\nabla_B = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$

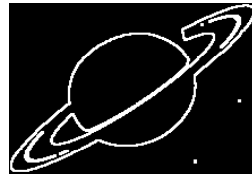


Image dilatée - Image érodée = Gradient morphologique

Pré-traitements : Gradient Morphologique

■ Ensembles :

■ $\mathcal{E}_B(X) = \square$

■ $X = \square + \blacksquare$

■ $\delta_B(X) = \square + \blacksquare + \blacksquare$

■ Gradients :

■ $\nabla_B(X) = \blacksquare + \blacksquare$

■ $\nabla_B^+(X) = \blacksquare$

■ $\nabla_B^-(X) = \blacksquare$



Pré-traitements : Morpho Math : Opérations Géodésiques

➤ Les opérations géodésiques sont des opérations conditionnées par un élément de référence.

➤ Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

↪ Dilatation Géodésique (dilatation conditionnelle) :

• Dilatation de X dans Y par un élément de taille 1

- $\delta_{B_1}^Y(X) = \delta_{B_1}(X) \cap Y$

• Dilatation de X dans Y par un élément de taille λ

- $\delta_{B_\lambda}^Y(X) = [\delta_{B_1}(X) \cap Y]^\lambda$

↪ Erosion Géodésique (érosion conditionnelle)

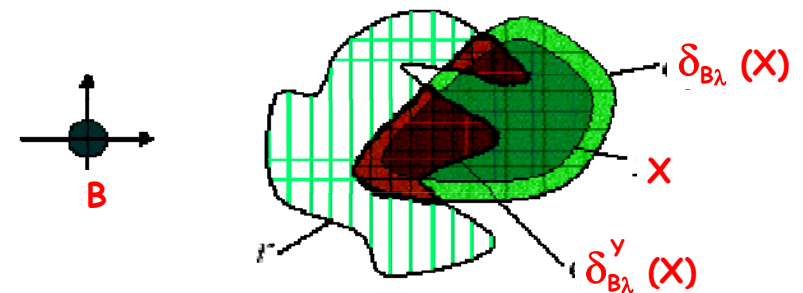
• Erosion de X dans Y par un élément de taille λ

- $\varepsilon_{B_\lambda}^Y(X) = X \setminus \delta_{B_\lambda}^Y(X)$

Pré-traitements : Morpho Math : Dilatation Géodésique

➤ Dilatation de X dans Y par un élément de taille λ

- $\delta_{B_\lambda}^Y(X) = [\delta_{B_1}^Y(X) \cap Y]^\lambda$
 $= \{x \in \mathbb{Q}^n / (X \oplus B_\lambda) \cap Y \neq \emptyset\}$

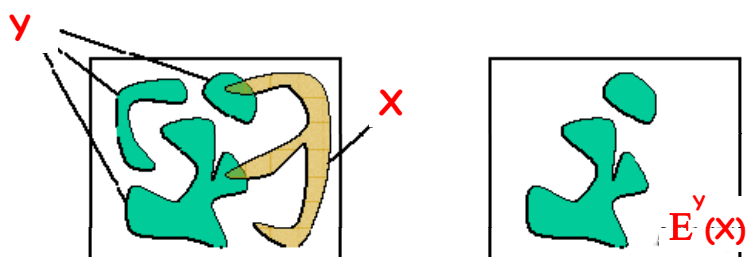


Pré-traitements : Morpho Math: Reconstruction Géodésique

- La Reconstruction Géodésique de X dans Y est la dilatation de X dans Y par un élément de taille infinie
- Elle correspond aux composantes connexes de Y qui ont une intersection non vide avec X

$$- E^Y(X) = [\delta_{B_1}^Y(X) \cap Y]^\infty$$

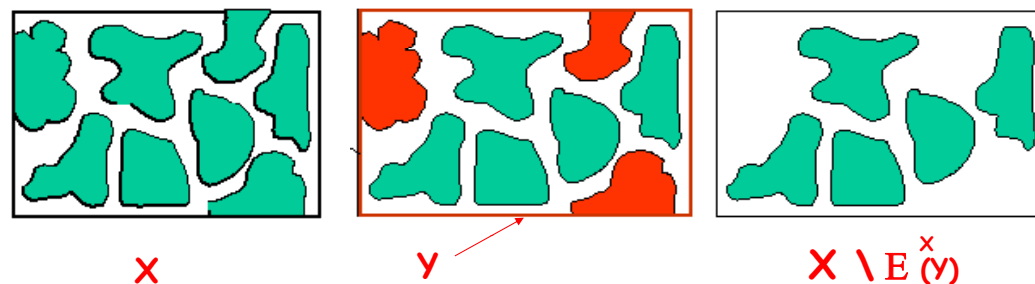
$$= \{x \in \mathbb{R}^n / (X \oplus B_\infty) \cap Y \neq \emptyset\}$$



Pré-traitements : Morpho Math: Opération Géodésique

- Suppression des objets touchant le bord d'une image binaire :
 - ↳ Différence symétrique de X avec la reconstruction du bord Y de l'image dans X

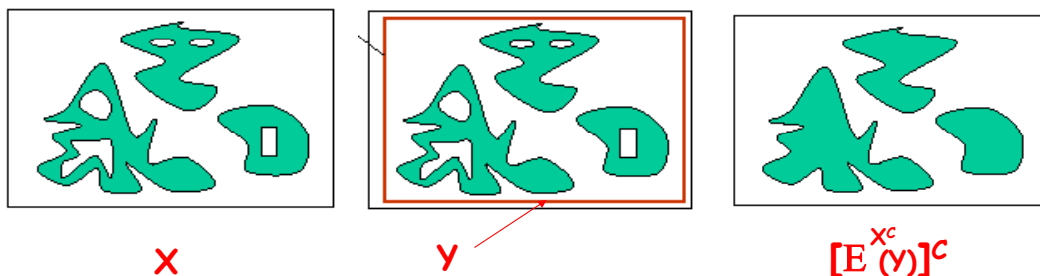
$$X \setminus E^X(Y)$$



Pré-traitements : Morpho Math: Opération Géodésique

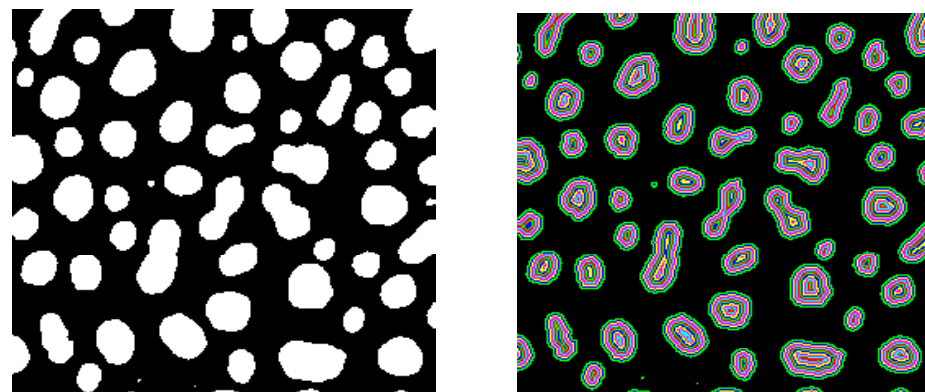
- Bouchage de trous dans une image binaire :
 - ↳ Complément de la Reconstruction dans X^c d'un ensemble Y tel que $Y \cap X \neq \emptyset$:

$$[E^{X^c}(Y)]^c$$

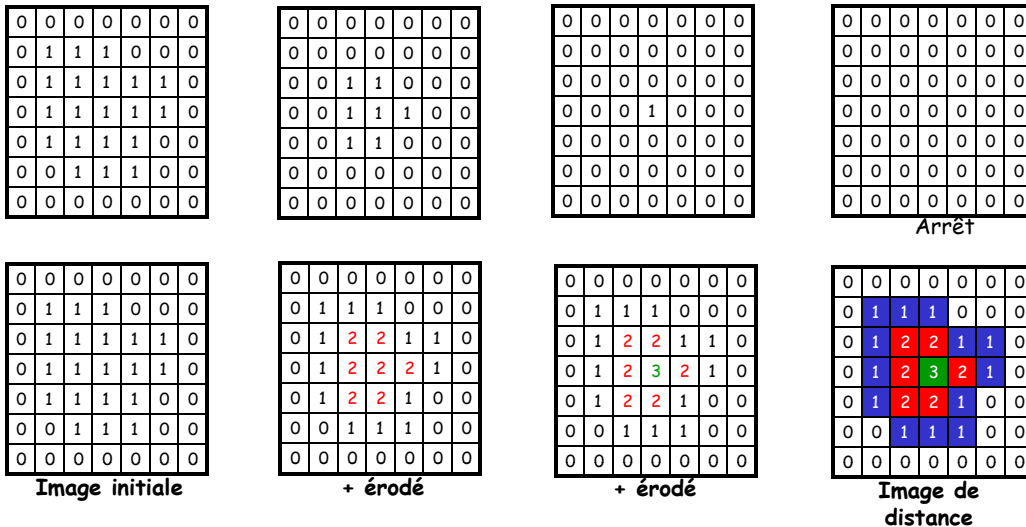


Pré-traitements : Morpho Math: Transformée en Distance

- La Transformée en Distance permet de donner une représentation des objets à la suite d'érosions successives (ou d'érosion de taille λ variable)



➤ Exemple en 4-voisinage :

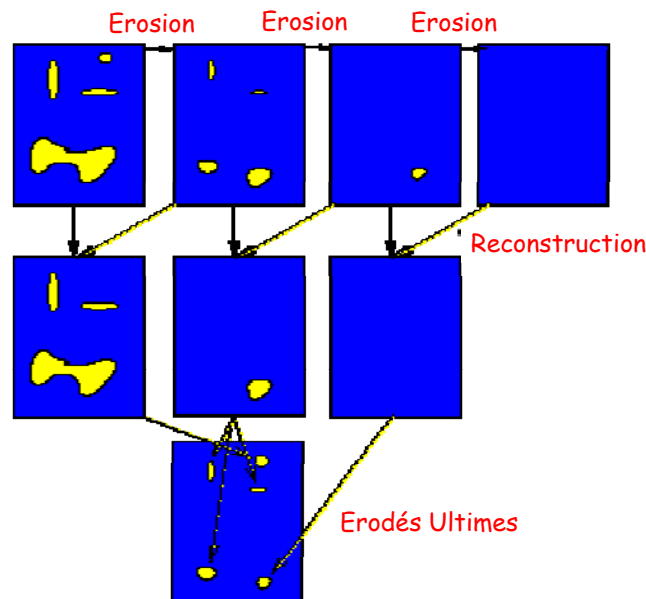


➤ L'Erodé Ultime est la réunion de toute les composantes d'un objet binaire qui disparaissent d'une érosion à l'autre dans une séquence d'érosions par un élément structurant B:

$$EU = \bigcup_n \{ \varepsilon_{B_n}(X) \setminus E(\varepsilon_{B_{n+1}}(X) ; \varepsilon_{B_n}(X)) \}$$

- ↪ E correspond à la reconstruction de l'érodé de X avec B_{n+1} dans l'érodé de X par B_n
- ↪ Les Erodés Ultimes peuvent servir de marqueurs pour les opérations de reconstruction.

➤ Exemple :



- Le squelette est une représentation compacte des objets, homotopique à l'objet de départ.
- Propriétés recherchées:

Préservation de la géométrie

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : canaliculations, parties allongées...

Épaisseur nulle

Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.

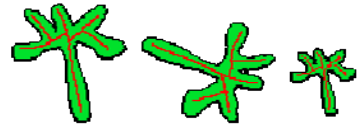
Préservation de la topologie

Le squelette doit conserver les relations de connectivité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.

➤ Propriétés recherchées(suite) :

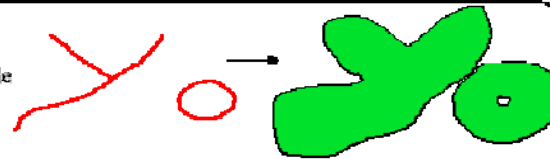
Invariance aux transformations affines

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



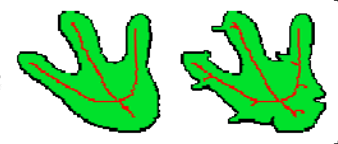
Réversibilité

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



Continuité

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



➤ Le Squelette Morphologique est par définition l'union (pour tout les $\lambda > 0$) de l'intersection (pour tout les $\mu > 0$) de la différence entre l'érosion de X par l'élément structurant B de taille λ et de l'ouverture par B_μ de l'érosion de X par B_λ :

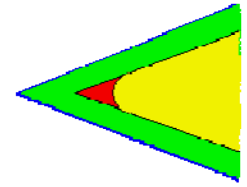
↪ Formule de Lantuéjoul:

$$S(X) = \bigcup_{\lambda} \bigcap_{\mu} [\mathcal{E}_{B_\lambda}(X) \setminus \gamma_{B_\mu}(\mathcal{E}_{B_\lambda}(X))] = \bigcup_n [\mathcal{E}_{B_n}(X) \setminus \gamma_{B_n}(\mathcal{E}_{B_n}(X))]$$

➤ Propriétés:

- ↪ Sans épaisseur,
- ↪ anti-extensif,
- ↪ idempotent,
- ↪ non-homotopique,

■ + ■ + ■	: X
■ + ■	: $\mathcal{E}_{AB}(X)$
■	: $\gamma_{AB}(\mathcal{E}_{AB}(X))$
■	: $\mathcal{E}_{AB}(X) - \gamma_{AB}(\mathcal{E}_{AB}(X))$



➤ Transformée Tout ou Rien (Hit or Miss T):

↪ Basée sur la vérification de la correspondance entre:

- l'objet X et une partie de l'élément structurant B_1
- Le complémentaire de X et l'autre partie B_2 de l'élément structurant.

$X \otimes B = \mathcal{E}_{B_1}(X) \cap \mathcal{E}_{B_2}(X^c)$

Pré-traitements : Amincissement / Epaisseur

- L'amincissement de X par l'élément structurant $B=(B_1, B_2)$ est défini par :

$$\theta_B(X) = X \setminus X \otimes B$$

- L'amincissement est une opération anti-extensive qui supprime de X des points dans une configuration particulière

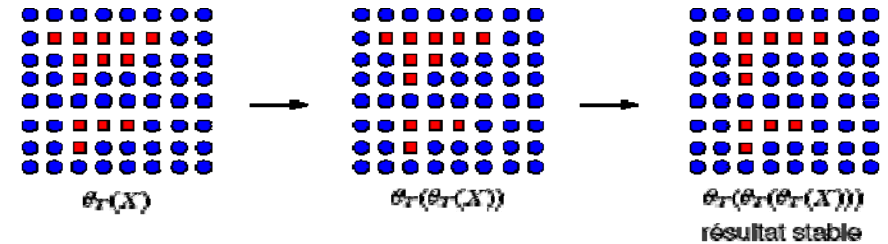
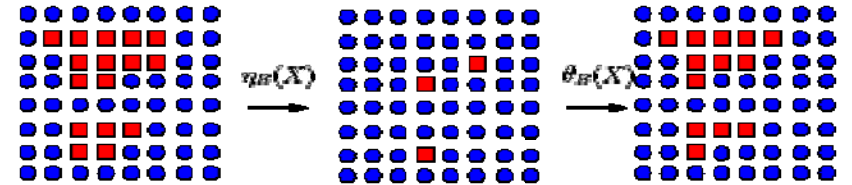
- L'épaississement de X par l'élément structurant $B=(B_1, B_2)$ est défini par

$$\xi_B(X) = X \cup X \otimes B$$

- L'épaississement est une opération extensive qui ajoute à X des points dans une configuration particulière

Pré-traitements : Amincissement : exemple

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} \blacksquare & \circ & \circ \\ \circ & \blacksquare & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{matrix}$$



Pré-traitements : Squelette par amincissements

➤ Définition :

↪ Le squelette par amincissement utilise une famille d'éléments structurants qui préservent l'homotopie (M, L ou D). La famille est obtenue par rotation de la configuration L, M ou D. L'amincissement s'arrête lorsqu'il n'y a plus de modification des pixels de l'image.

$$\text{↪ } S_L(X) = [\theta_L(X)]^\infty = [X \setminus X \otimes L]^\infty$$

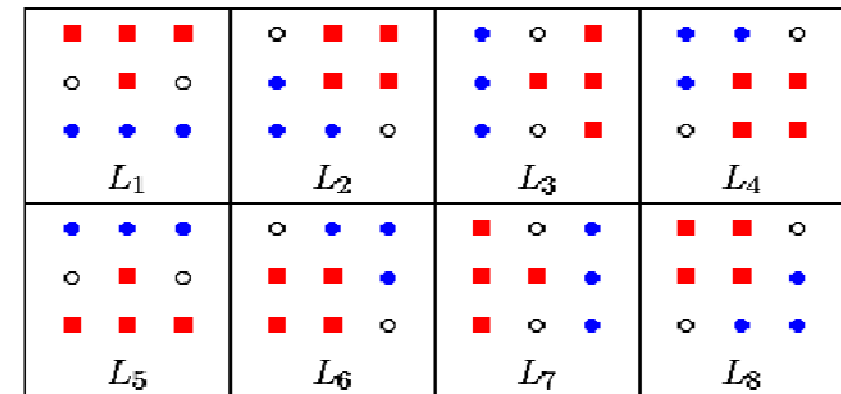
- Afin d'amincir dans toutes les directions il nous faut une famille d'éléments structurants se déduisant les uns des autres par rotations:

- ↪ Pour une maille carrée on obtient 8 éléments avec une rotation de $\pi/4$
- ↪ Pour une maille triangulaire on a 6 éléments avec une rotation de $\pi/3$

Pré-traitements : Squelette par Amincissements

- On a 8 éléments L_1, \dots, L_8

$$\theta_{1L}(X) = \theta_{L_8}(\dots \theta_{L_3}(\theta_{L_2}(\theta_{L_1}(X))))$$



Pré-traitements : Squelette par Amincissements

➤ Différentes familles d'éléments structurants :

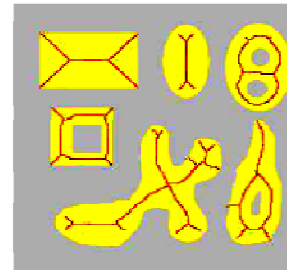
■ En 8 connexité

	Famille	Amincissement
L		Squelette homotopique L : $Lskel$
M		Squelette homotopique M : $Mskel$
E		Ébarbage

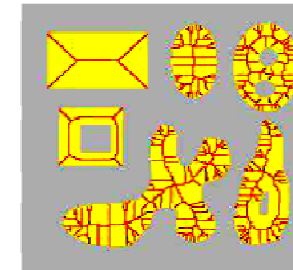
Pré-traitements : Squelette par Amincissements

➤ Exemples en 8-Voisinage :

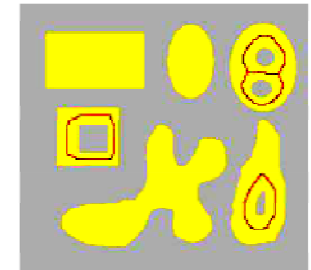
↳ La squelettisation par amincissements successifs conserve les propriétés de connexité



$Lsk(X)$



$Msk(X)$



$Lsk(X)$ ébardé par E .

Pré-traitements : Morphologie Mathématique des images de niveaux de gris

➤ On se place dans le cadre du treillis des fonctions :

↳ On remplace : \cup par $\text{Max}(\vee)$; \cap par $\text{Min}(\wedge)$; \subset par \geq et \supset par \leq

Treillis des fonctions

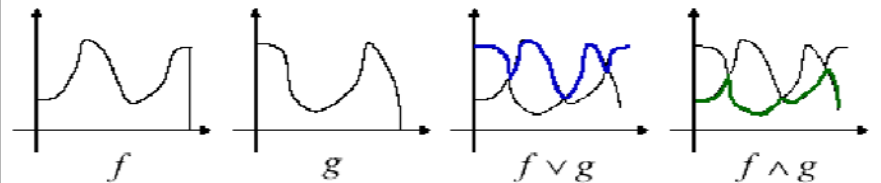
• éléments : les fonctions réelles ou numériques : $f : S \rightarrow \mathbf{R}$
ou $S \rightarrow \mathbf{Z}$

• relation d'ordre : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• sup : $\vee \{f_i\}$

• inf : $\wedge \{f_i\}$

définies par : $\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$



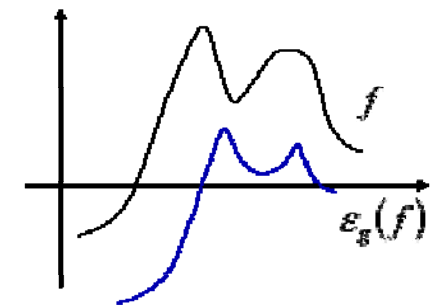
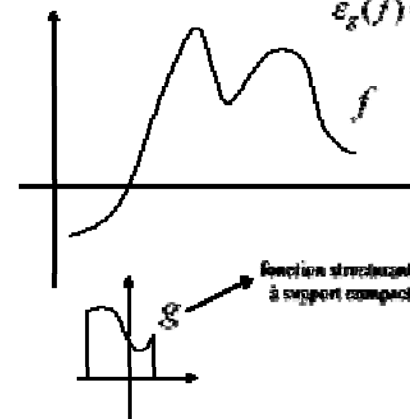
Pré-traitements : Morphologie Mathématique des images de niveaux de gris

On se place à présent dans le cadre des fonctions : $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \tilde{g} \quad \delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y-x)\}$$

$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \tilde{g} \quad \varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y-x)\}$$



Pré-traitements : Définitions formelles

➤ Dilatation:

$$(f \oplus b)(x, y) = \max \{ f(s, t) + b(x - s, y - t) \mid (s, t) \in D_f; (x - s, y - t) \in D_b \}$$

Convolution
mais + et max

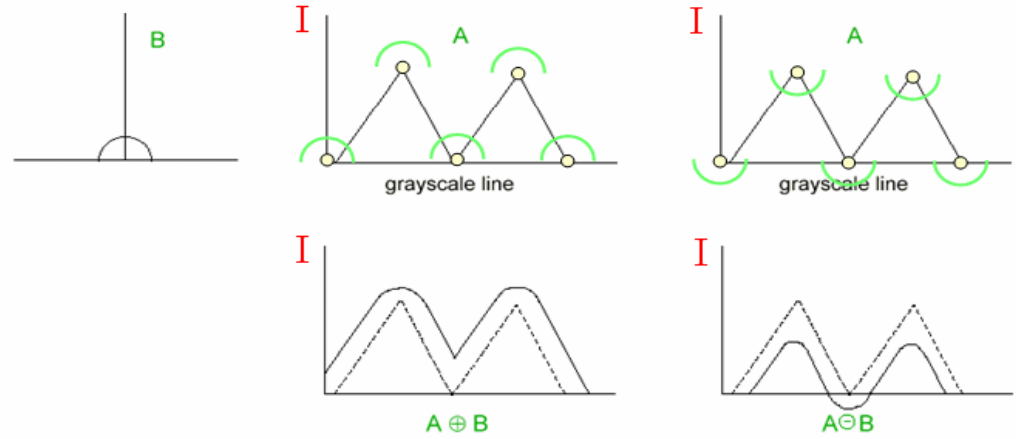
On s'assure de ne pas sortir
de l'image ni du masque

➤ Érosion:

$$(f \ominus b)(x, y) = \min \{ f(s, t) - b(x - s, y - t) \mid (s, t) \in D_f; (x - s, y - t) \in D_b \}$$

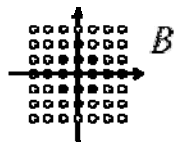
Morphologie Mathématique des images de niveaux de gris

Pré-traitements :

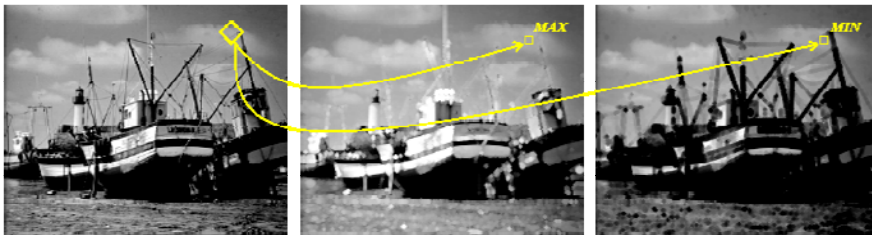


Pré-traitements : Morphologie Mathématique des images de niveaux de gris

Le treillis est l'ensemble
des fonctions de Z^2 dans Z



élément
structurant plan
 \cong
ensemble



X

$\delta_B(X)$

$\varepsilon_B(X)$

Pré-traitements : Exemple

1	2	1
2	3	2
1	2	1

b

$D_f: \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 6 \text{ et } 0 \leq y \leq 6 \}$
c-à-d toute l'image

$f \ominus b$

$(f \ominus b)(4,4)$

-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-2	-2	-2	-3	-3
-3	-3	-2	9	-2	-3	-3
-3	-3	-2	-2	-2	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	10	11	12	0	0
0	0	11	12	13	0	0
0	0	12	13	14	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

f

$f \oplus b$

3	3	3	3	3	3	3
3	11	12	13	14	13	3
3	12	13	14	15	14	3
3	13	14	15	16	15	3
3	14	15	16	17	16	3
3	13	14	15	16	15	3
3	3	3	3	3	3	3

Pré-traitements : Exemple

$$(f \ominus b)(x,y) = ?$$

$$\min\{f(s,t) - b(4-s,4-t) \mid (s,t) \in D_f; (4-s,4-t) \in D_b\}$$

$$b(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 12 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b(4-s,4-t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(s,t) - b(4-s,4-t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 11 & 11 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(f \ominus b) = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Pré-traitements : Morphologie Mathématique des images de niveaux de gris

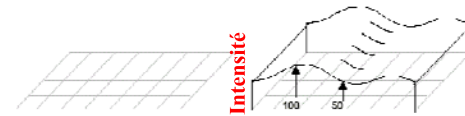
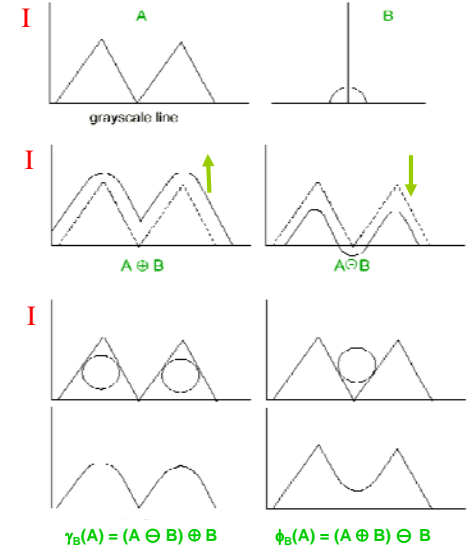
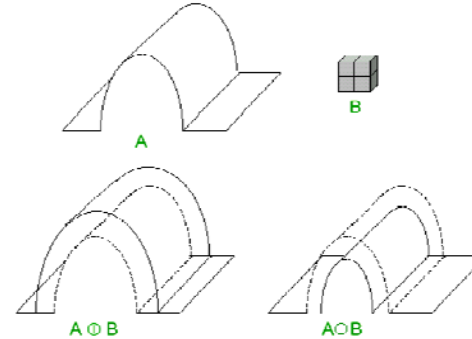


Image NdeG

$$A, B \in \mathbb{Z}^3$$



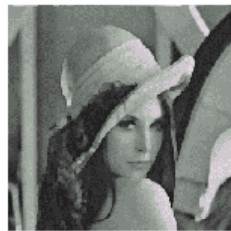
Pré-traitements : Exemples



Dilatation



Érosion

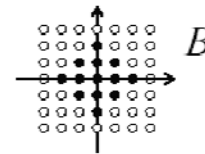


Ouverture



Fermeture

Pré-traitements : Exemples



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



X



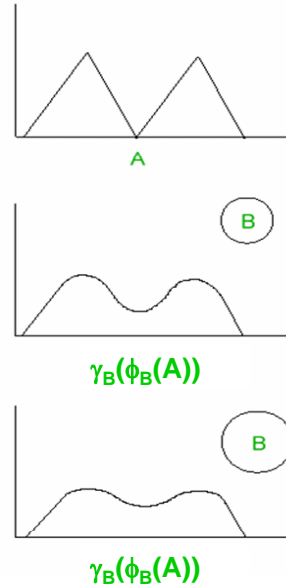
$\gamma_B(X)$



$\phi_B(X)$

Pré-traitements : Lissage morphologique

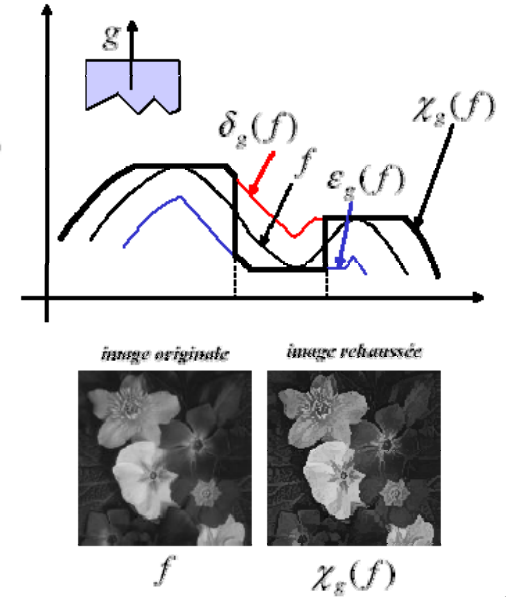
- **Ouverture** → Elimine les pics clairs plus petits que l'élément structurant
- **Fermeture** → Elimine les vallées sombres plus petites que l'élément structurant



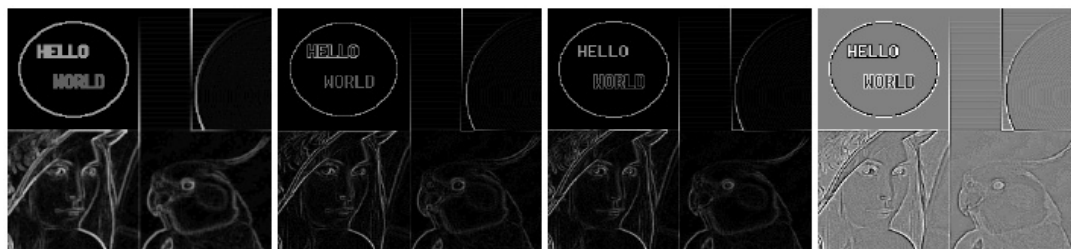
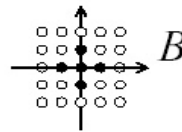
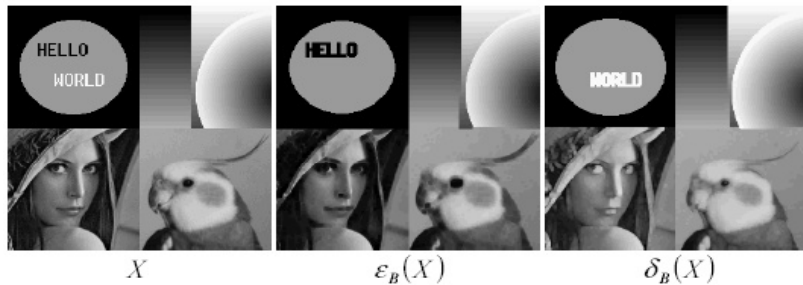
Pré-traitements : Rehaussement morphologique

Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) < (f - \varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) > (f - \varepsilon_g(f)) \end{cases}$$



Pré-traitements : Gradient morphologique



$$\nabla_B^+ = X - \varepsilon_B(X) \quad \nabla_B^- = \delta_B(X) - X \quad \nabla_B = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X) \quad \lambda_B = \nabla_B^+ - \nabla_B^-$$

Pré-traitements : Filtres Alternés Séquentiels

Soit $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une granulométrie, et $(\varphi_\lambda^* = \phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\Theta_\lambda = \phi_\lambda \gamma_\lambda \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1$$

$$\Xi_\lambda = \gamma_\lambda \phi_\lambda \dots \gamma_2 \phi_2 \gamma_1 \phi_1$$

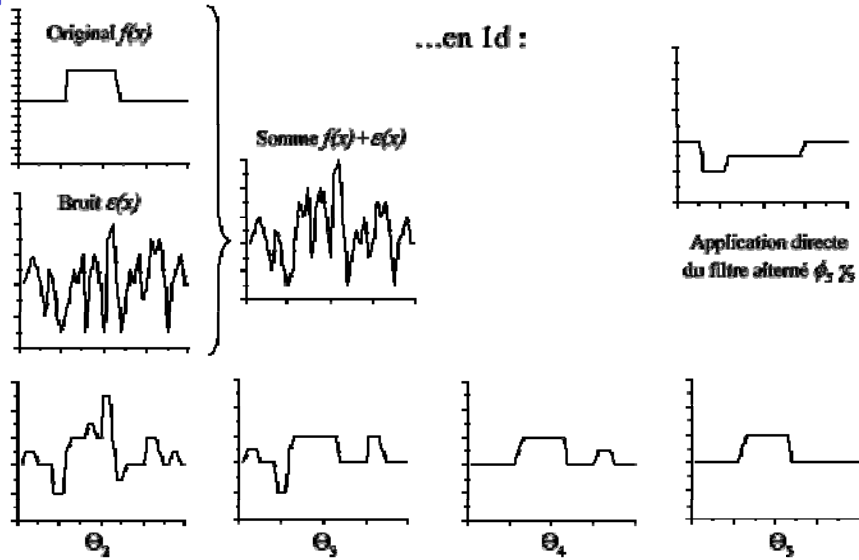
sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} = \Theta_{\lambda'} & \text{mais } \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_{\lambda'} \Xi_\lambda = \Xi_{\lambda'} & \text{mais } \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

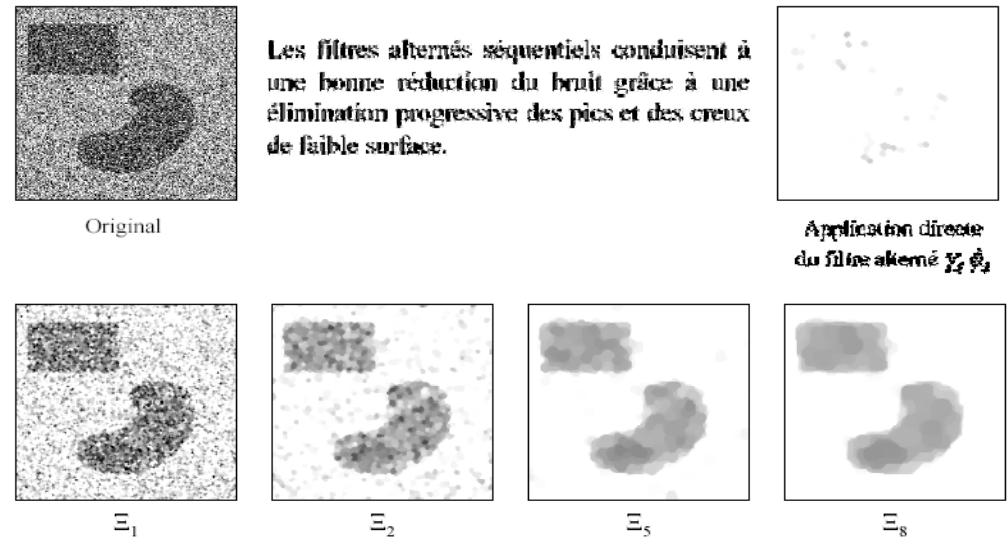
Pré-traitements : Filtres Alternés Séquentiels

➤ Application à la réduction du bruit :



Pré-traitements : Filtres Alternés Séquentiels

➤ Application à la réduction du bruit :



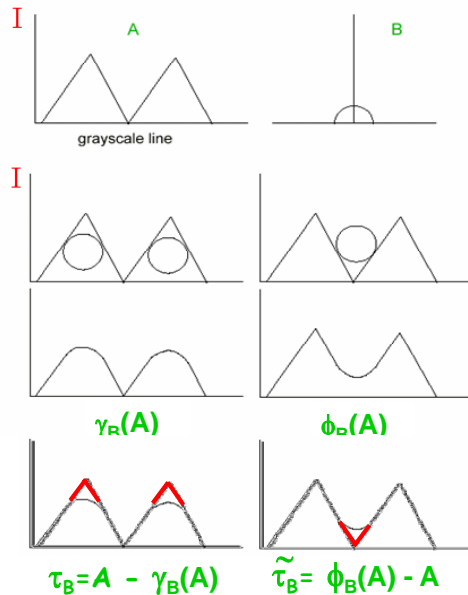
Pré-traitements : Chapeau haut de forme (Top Hat)

➤ Chapeau haut de forme blanc (White Top Hat) :
 ↳ Détection des régions claires (pics)

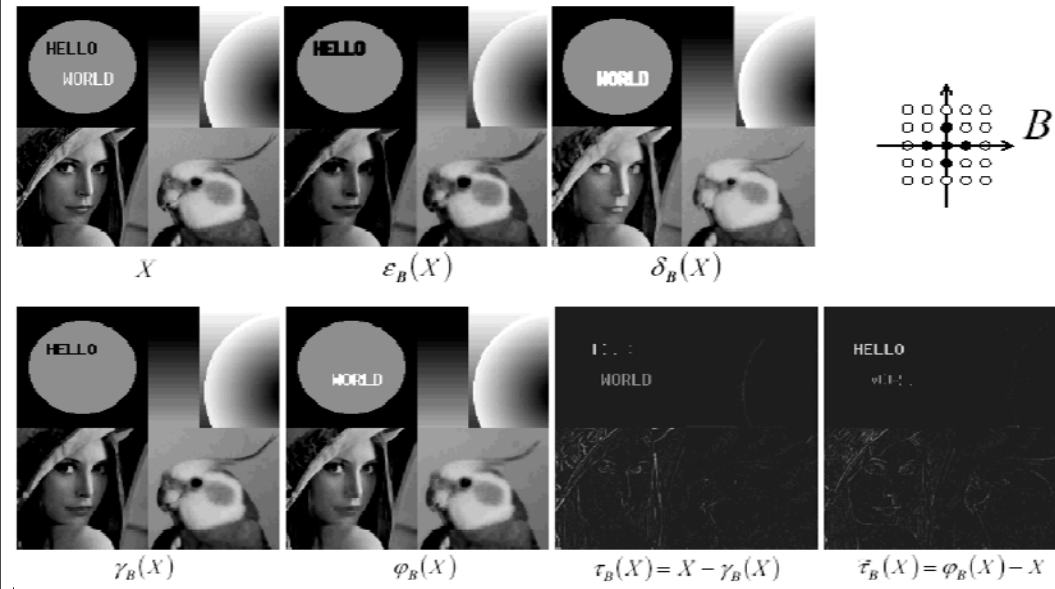
$$\tau_B(X) = X - \gamma_B(X)$$

➤ Chapeau haut de forme noir (Black Top Hat) :
 ↳ Détection des régions foncées (vallées)

$$\tilde{\tau}_B(X) = \phi_B(X) - X$$



Pré-traitements : Chapeau haut de forme (Top Hat)



Pré-traitements : Exemple 1

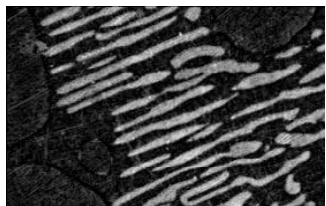


Bandes \approx 15 pixels de large

→ Impose le choix de l'élément structurant



Ouverture

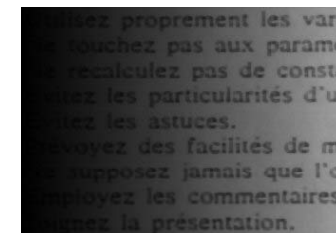
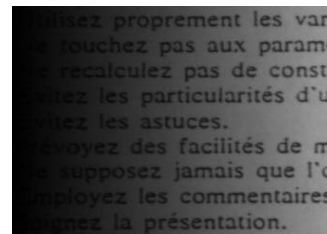


Chapeau haut de forme = image - ouverture

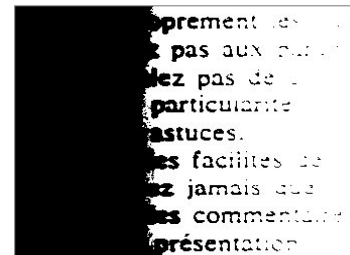


Seuillage S=85

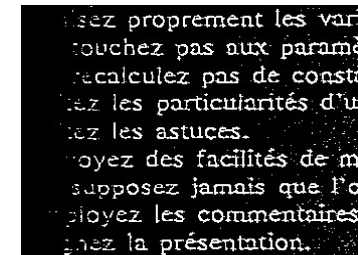
Pré-traitements : Exemple 2



Fermeture

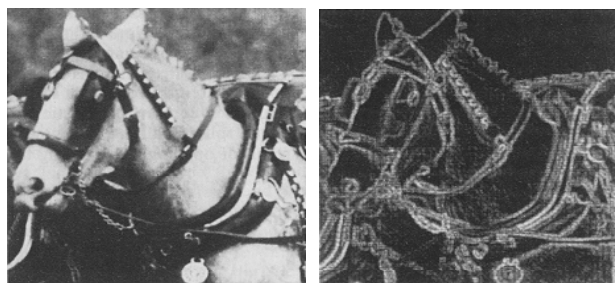
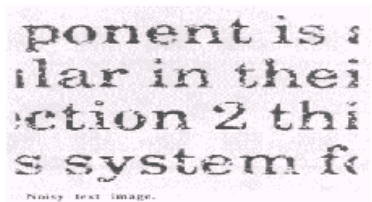


Seuillage S=50

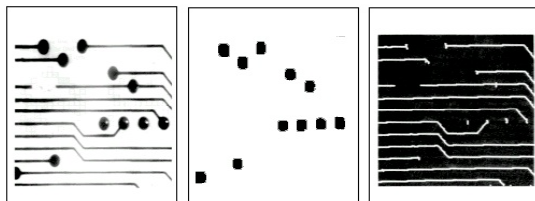


Chapeau haut de forme Puis seuillage

Pré-traitements : Exemples



$$\delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$$



$$\gamma_B(\phi_B(A))$$

$$\gamma_B(A)$$

$$S_B(A)$$