TD4: Algorithme du simplexe - Analyse post-optimale

1- Différents déroulements du simplexe en Phase-1

Pour chacun des problèmes de programmation linéaire suivants, écrire les problèmes auxiliaires (PLA) pour les variables artificielles et interpréter les dictionnaires obtenus sur les (PLA). Les variables artificielles sont notées a_i et les variables d'écarts e_i.

$$(a) \begin{cases} \max\,[F = x_1 - x_2] \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dictionnaire

$$\begin{array}{|l|} \hline x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \\ x_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 \\ a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + e_3 \\ \hline F_{aux} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + e_3 \\ \hline \end{array}$$

$$(b) \begin{cases} \max\,[F = 3x_1 + 2x_2 + x_3] \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

dictionnaire

$$\begin{array}{|l|} \hline x_1 = \frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = 5 - \frac{4}{3}x_3 \\ a_3 = 0 \\ \hline F_{aux} = 0 \\ \hline \end{array}$$

2- Différents déroulements du simplexe en Phase-2

Même question que précédemment avec les problèmes suivants.

$$(a) \begin{cases} \max\,[F = x_1 + x_2] \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dictionnaire

$$\begin{array}{|l|} \hline x_1 = 3 - \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \\ x_2 = 3 + \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ e_3 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ \hline F = 6 - \frac{1}{6}e_1 - \frac{1}{6}e_2 \\ \hline \end{array}$$

$$(b) \begin{cases} \max\,[F = 3x_1 + 2x_2] \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dictionnaire

$$\begin{array}{|l|} \hline x_1 = 5 - \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ e_2 = 6 + e_1 - 2x_2 \\ e_3 = 3 - x_2 \\ \hline F = 15 - e_1 \\ \hline \end{array}$$

(c) $\begin{cases} \max\,[F = x_1 + 3x_2] \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$

dictionnaire

$x_1 = 5 + 2x_2 + e_2$
$e_1 = 2 + 3x_2 + e_2$
$e_3 = 15 + 3x_2 + 2e_2$
$F = 15 + 5x_2 + e_2$

3- Analyse post-optimale sur un problème de production

On reprend le problème de production de l'Exercice 1 du TD3, à savoir:

$$\max\,[F = 50x_1 + 40x_2 + 70x_3 + 80x_4]$$

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 100 & \text{(équipement)} \\ 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 \leq 160 & \text{(main d'oeuvre)} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 20 & \text{(mat. première)} \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

1. *Préalables*
   – Interpréter la solution trouvée.
   – Caractériser l'optimum.
2. *Analyse post-optimale de l'objectif*
   - le produit P_1 est fabriqué : de combien peut-on augmenter ou diminuer le prix unitaire sans changer le plan de production ?
   - le produit P_2 n'est pas fabriqué : A partir de quel prix devient-il rentable ?
3. *Analyse post-optimale du second membre*
   - l'équipement est en excédent : de combien peut-on le réduire pour faire de la maintenance ?
   - un accident du travail entraîne une baisse de 30% de la main d'oeuvre : que devient le plan de production ?
   - il manque de la matière première : combien en acheter ? A quel prix maximal ?