Analyse post-optimale

Arthur Garnier

On introduit 3 variables artificielles

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + a_1 = 10 (1) \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + a_2 = 5 (2) \\ -x1 + x_2 + 3x_1 + a_3 = 5 (3) \\ x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0 \end{cases}$$

(1) -(2) donne (3)

C'est l'indication qu'il y a une équation redondante dans les contraintes.

1 Exercice 3

1.1

- $x_1^* = 12$
- $x_4^* = 4$
- $e_1^* = 52$ 52 unité d'équipement non utilisés
- $x_2^* = x_3^* = 0$ toutes les resources en main d'oeuvre et mat.première sont utilisées
- $e_2^* = e_3^* = 0$

Dernier dictionnaire :

- $x_1 = 12 - \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}e_2 + e_3$
- $x_4 = 4 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{1}{10}e_2 - e_3$
- $e_1 = 52 - \frac{8}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 - \frac{1}{5}e_2 + 4e_3$
- $F = 920 - 6x_2 - 2x_3 - 2e_2 - 30e_3$

Condition d'optimalité :

$L_{H^*}^T = c_{H^*}^T - c_{B^*} A_{H^*}^* \leq 0$

Vecteur des couts réduits

La matrice $A_{H^*}^*$ est la matrice lue dans le dernier dictionnaire.

$$\begin{pmatrix} +3/5 & -4/5 & +1/5 & -1 \\ +1/5 & +7/5 & -1/10 & +1 \\ +8/5 & +6/5 & +1/5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$x_{H^*} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}; x_{B^*} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ e_1 \end{pmatrix}; c_{B^*} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}; c_{H^*} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{H^*}^T = c_{H^*}^T - c_B^T A_{H^*}^* = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -2 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Le vecteur L_{H^*} est sensible au coefficient c de F. Pour etudier la sensibilité du coeff devant x_1 dans F(50), on le remplace par un paramètre c_1 et on calcule les nouveaux coûts réduits L_{H^*}

$$c_{B^*} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}; c_{H^*} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$L_{H^*}^T = (40, 70, 0, 0) - (c_1, 80, 0)A_{H^*}^* = (40, 70, 0, 0) - (c_1\frac{3}{5} + 80\frac{1}{5} + 0 \times \frac{8}{5}, -c_1\frac{4}{5} + 80\frac{7}{5}, c_1\frac{1}{5} - 80\frac{1}{10}, -c_1 + 80) = (40, c_1\frac{3}{5} - 16, 70 + c_1\frac{4}{5} - 112, -c_1/5 + 8, c_1 - 80)$

1.2 Etude de sensibilité du coeff de x_1 dans F

1.2.1

$L_{H^*}^T = c_{H^*}^T - c_{B^*}^T A_{H^*}^* \leq 0$

$A_{H^*}^* =$ matrice du dernier dictionnaire (au signe opposé)

$50 \to c_1$

$$c_{B^*} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \to c_{B^*} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{H^*} = \begin{pmatrix} 24 - \frac{3}{5}c_1 \\ -42 + \frac{4}{5}c_1 \\ c_1 - 80 \end{pmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \geq 24\frac{5}{3} = 40 \\ c_1 \leq 42\frac{5}{4} = \frac{105}{2} \\ c_1 \geq 8 \times 5 = 40 \\ c_1 \leq 80 \end{cases} \Leftrightarrow 40 \leq c_1 \leq 51.5$$

Conclusion : Si $40 \leq c_1 \leq 52.5$ alors la solution optimale x^* est inchangée : $x_1^* = 12; x_4^* = 4; e_1^* = 52; x_2^* = x_3^* = e_2^* = e_3^* = 0$

$maxF = 12c_1 + 320 = F(x^*)$

Par exemple, avec $c_1 = 52.5$, on a $maxF = 950 \Rightarrow$ un gain $\Delta F = 30$

1.2.2 Sensibilité du coeff de x_2 dans F

$$c_{B^*} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}; c_{H^*} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_2 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^*_{H^*} = \begin{pmatrix} +3/5 & -4/5 & +1/5 & -1 \\ +1/5 & +7/5 & -1/10 & +1 \\ +8/5 & +6/5 & +1/5 & -4 \end{pmatrix}$$

$L^T_{H^*} = (c_2, 70, 0, 0) - (50, 80, 0)A^*_{H^*} = (c_2 - 46, -2, -2, 30) \leq 0 \Leftrightarrow c_2 \leq 46$

Conclusions :

- Si $c_2 \leq 46$ alors la solution optimale x^* est inchangée.
- Si $c_2 > 46$ le coût réduit sur la variable x_2 devient $> 0 \Rightarrow x_2$ est une variable entrante qui devient non nulle.Il devient donc intéressant de produire P_2