TD3: Programmation linéaire - Algorithme du simplexe

1- Algorithme du simplexe - Méthode des dictionnaires

Une usine fabrique 4 produits $P_1, \cdots, P_4$ nécessitant une certaine quantité d'équipement, de main-d'oeuvre et de matière première. Pour chacun des produits, les besoins unitaires (c'est-à-dire *par unité de produit*) sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	P_1	P_2	P_3	P_4	disponibilité
équipement	2	4	8	6	100
main d'œuvre	10	8	6	10	160
mat. première	1	1	2	2	20
bénéfice (€/unités)	50	40	70	80	

On veut maximiser le bénéfice total qui provient de la vente de ces produits.

1. Modéliser ce problème sous forme de programmation linéaire.
2. Utiliser l'algorithme du simplexe pour le résoudre. Vous mettrez en place la méthode des dictionnaires qui consiste à exprimer à chaque étape du simplexe les variables de base ainsi que la fonction objectif en fonction des variables hors-base.

2- Variables artificielles

1) On considère un (PL) sous forme canonique pure

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

Donner une condition suffisante sur le second membre b pour obtenir *sans calcul* une solution de base réalisable de (PL) mis sous forme standard.

2) Résoudre le problème de programmation linéaire suivant par l'algorithme du simplexe (méthode des dictionnaires)

$$\max\,[F = 3x_1 + 4x_2 + x_3]$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$