# Algorithme du simplexe

Arthur Garnier

## 1 Exercice 2

1. (PL)

- $max[F = c^T x]$
- $Ax \leq b$
- $x \geq 0$

La forme standard de (PL) est obtenue en adjoignant à $X \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $e \in \mathbb{R}^m$ des variables d'écart.

Forme standard :

(PL') $max_{\tilde{x}=[x,e]}[\tilde{F} = c^T x]; \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} Ax + e = b \\ x \geq 0, e \geq 0 \end{cases}$$

NB : $F = F(x) = c^T x$ et $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{x}) = c^T x$

Solution de base réalisable sans calcul : $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ à la condition que $b \geq 0$

2. $max[F = 3x_1 + 4x_2 + x_3]$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9(-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -9) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Mise sous forme standard :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_1 = 8(1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - e_2 = 9(2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Adjonction d'une variable artificielle a_2 sur contrainte (2).

Problème (PLA) est : $min[F_{aux} = a_2]$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_1 = 8(1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - e_2 + a_2 = 9(2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ e_1, e_2 \geq 0 \\ a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution de base de démarrage pour la phase 1 :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = e_2 = 0 \\ e_1 = 8, a_2 = 9 \end{cases}$$

$F_aux = 9$

Début phase 1 :

- Dictionnaire : Expression des vatiables de base (“B”) en fonction des variables hors nase (“H”).

$$\begin{cases} e_1 = 8 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ a_2 = 9 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + e_2 \end{cases}$$

$F_{aux} = 9 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + e_2$

$[F_{aux}(, a) = a_1 + a_2 + ... + a_m =$ fonction du coût du PLA]

- Variable entrante : $min{-1, -2, -3, 1} = -3$ (car on a $min(F_{aux})$)

$\Rightarrow x_e = x_3 =$ variable entrante.

- Variable sortante :

On maintient les conditions de positivité sur $e_1$ et $a_2$ :

1. $e_1 \geq 0$ avec $x_1, x_2, e_2 = 0$
2. $a_2 \geq 0$ avec $x_1, x_2, e_2 = 0$

$min(\frac{8}{2}; \frac{9}{3}) = \frac{9}{3} = 3$

Donc c’est $a_2$ qui s’annule en premier $\Rightarrow a_2$ sort de la base.

$X_s = a_2$ et $x_3 = 3$

On a donc :

- $x_1 = x_2 = e_2 = 0$ (restent HB)
- $a_2 = 0$
- $x_3 = 3$

Fin normale de la phase 1 : La seule variable artificielles est sortie de la base.

Conclusion : Solution de base réalisable pour initialisation phase 2.

$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$

Phase 2 :

- Etape 1 :

Dictionnaire :

$(x_3, e_1)$ en fonction de $(x_1, x_2, e_2)$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{3}(9 - x_1 - 2x_2 + e_2) \\ e_1 = 8 - x_1 - 2x_2 - \frac{2}{3}(9 - x_1 - 2x_2 + e_2) \end{cases}$$

$F = 3x_1 + 4x_2 + \frac{1}{3}(9 - x_1 - 2x_2 + e_2)$

2. Variable entrante :

$x_e = max\{\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\} = \frac{10}{3} \Rightarrow X_e = x_2$

3. Variable sortante :

On maintient $x_3 \geq 0, e_1 \geq 0$ et $X_2$ augmente :

$X_2 = min(\frac{3}{2/3}; \frac{2}{2/3}) = \frac{2}{2/3} = 3 \Rightarrow e_1$ soit : $X_s = e_1$

4. Nouvelle solution réalisable :

- $x_1 = e_2 = e_1 = 0$ HB
- $x_2 = 3; x_3 = 3 - \frac{2}{3} * 3 = 1$ B
- $F = 3 + \frac{8}{3} * 0 + \frac{10}{3} * 3 + \frac{1}{3} * 0 = 13$

Phase 1 : a fourni $\tilde{x}^0$

$\tilde{x}^0 \begin{bmatrix} x^0 \\ e^0 \end{bmatrix}; x_1^0 = x_2^0 = e_2^0 = 0; x_3^0 = 3; e_1^0 = 8; F = x_3^0 = 3$

Phase 2 :

- Etape 1 : a fourni la solution de base (réalisable)
  - $x_1 = e_2 = e_1 = 0$ (HB)
  - $x_2 = 3; x_3 = 1$ (B)
- Etape 2 :

a. Dictionnaire : mise à jour du précédent :

---

- $x_3 = 3 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}e_2$ (**)
- $e_1 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}e_2$ (*)
- $F = 3 + \frac{8}{3}x_1 + \frac{10}{3}x_2 + \frac{1}{3}e_2$

---

- $x_e = x_2$
- $x_s = e_1$

On exprime $x_e = x_2 =$ variable entrante dans l'équation correspondant à la variable $x_s = e_1$

On obtient dans (*) :

$x_2 = \frac{3}{2}(2 - \frac{1}{3}x_1 - e_1 - \frac{2}{3}e_2)$

Et (**) devient : $x_3 = 3 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}(2 - \frac{1}{3}x_1 - e_1 - \frac{2}{3}e_2) + \frac{1}{3}e_2$

$F = 3 + \frac{8}{3}x_1 + \frac{10}{3} \times \frac{3}{2}(2 - \frac{1}{3}x_1 - e_1 - \frac{2}{3}e_2) + \frac{1}{3}e_2$

On obtient :

---

- $x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}e_1 - e_2$
- $x_3 = 1 + e_1$
- $F= 13+x_1 - 5e_1 - 3 e_2

---

b. Variable entrante

$x_e =$ La variable qui accroit le plus F en conservant les autres $= 0$ donc $x_e = x_1$ et $e_1 = e_2 = 0$

c. Variable sortante

On maintient $x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$ avec $e_1 = e_2 = 0$

$x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{3}{1/2}$

$x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 0x_1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq +\infty$

$min(\frac{3}{1/2}; \infty) = \frac{3}{1/2} = 6$

Ceci dit que la variable sortante correspond à l'équation qui a donné le min. Ici, c'est donc $x_2$ qui sort de la base : $x_s = x_2$

d. Bilan

Nouvelle solution de base réalisable :

- HB : $e_1, e_2, x_2 = 0$
- B : $x_1 = 6; x_3 = 1$
- $F = 13 + x_1 - 5e_1 - 3e_2 = 13 + 6 = 19$

Etape 3 : Nouvelle variable de nase $x_1$ en fonction de $e_1, e_2, x_2$ ($x_2 =$ nouvelle variable HB)

On avait :

$x_2 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}e_1 - e_2$

donne :

- $x_1 = 2(3 - x_2 - \frac{3}{2}e_1 - e_2)$
- $x_3 = 1 + e_1$
- $F = 13 + 2(3 - \frac{3}{2}e_1 - e_2) - 5e_1 - 3e_2$

Dictionnaire mis à jour :

---

- $x_1 = 6 - 2x_2 - 3e_1 - 5e_2$
- $x_3 = 1 + e_1$
- $F = 19 - 2x_2 - 8e_1 - 5e_2$

---

Tous les coefficients des variables HB sont $< 0$. Donc l'optimum est atteint et il est unique.

- $x_2^* = e_1^* = e_2^* = 0$
- $x_1^* = 6; x_3^* = 1$
- $F^* = 19 = max(F(x))$

## 2 Exercice ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + e_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 + x_2 - e_3 = 4 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard avec les variables artificielles :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + e_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 + x_2 - e_3 + a_1 = 4 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1 \geq 0 \end{cases}$$

On a à un moment le dictionnaire suivant :

---

- $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2$
- $x_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2$
- $a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + e_3$
- $F_{aux} = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + e_3$

---

Ici : $F_{aux} = a_1$ On ne peut plus diminuer $F_{aux}$. Donc le minimum est atteint et c'est $\frac{1}{3}$

Donc $a_1 = \frac{1}{3} > 0$. Ceci signifie qu'il n'existe pas de solution de base (réalisable) pour (PC)

# 3 Exercice 1

$maxF = 50x_1 + 40x_2 + 70x_3 + 80x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 100 \\ 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 \leq 160 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + e_1 = 100 \\ 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 + e_2 = 160 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution de base réalisable initiale :

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0; e_1 = 100; e_2 = 160; e_3 = 20$

$x_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}; x_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$A_H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 10 & 8 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Etape 1: On exprime les variables de bases en fonction des variables hors bases.

Dictionnaire :

---

- $e_1 = 100 - 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 6x_4$
- $e_2 = 160 - 10x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 10x_4$
- $e_3 = 20 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4$
- $F = 50x_1 + 40x_2 + 70x_3 + 80x_4$

---

Variable entrante :

$max(50, 40, 70, 80) = 80 \Rightarrow x_e = x_4$

Variable sortante :

$x_4 \leq \frac{100}{6}; x_4 \leq \frac{160}{10}; x_4 \leq \frac{20}{2}$

$min(\frac{100}{6}; \frac{160}{10}; \frac{20}{2}) = 10$

Donc $x_s = e_3 = 0$

Nouvelle solution de base réalisable :

Variables hors-base : $x_1 = x_2 = x_3 = e_3 = 0$

Variables de base : $x_4 = 10; e_1 = 100 - 6 * 10 = 40; e_2 = 160 - 100 = 60$

$$x_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 10 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} = x_B = A_B^{-1} b$$

Etape 2 : On exprime tout en fonction des nouvelles variables hors base.