TELECOM Nancy - Apprentissage 2A 2015-2016 *Graphes et Recherche opérationnelle*

TD2: Programmation linaire - Propriétés des solutions

Rappel sur les solutions de base: Soit un programme linéaire (PL) sous forme standard :

$$(PL) \quad \begin{cases} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\right] \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{1}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$ avec rang$(A) = m \leq n$. Le vecteur $\mathbf{c}$ est donné dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La matrice A peut se décomposer, à une permutation près des colonnes, sous la forme :

$$A = (A_B | A_H), \tag{2}$$

où la matrice carrée A_B de taille $m \times m$ est *inversible.* Une *solution de base* $\mathbf{x}$ associée s'écrit alors:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathbf{x}_H = \mathbf{0}. \tag{3}$$

où $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m$ sont les *variables de base* et $\mathbf{x}_H \in \mathbb{R}^{n-m}$ sont les *variables hors-base.*

1- Solutions de base

Soit le PL suivant:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} [F(x) = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3] \tag{4}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

1) Ecrire le PL sous forme standard $\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ avec $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, en précisant ce que valent la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$.

2) Déterminer plusieurs solutions de base associées à une base B. Indiquer dans chacun des cas ce que valent les matrices A_B et A_H avec les variables de base $\mathbf{x}_B$ et les variables hors-base $\mathbf{x}_H$. Donner les composantes correspondantes $\mathbf{c}_B$ et $\mathbf{c}_H$ du vecteur $\mathbf{c}$ de la fonction objectif F sous la forme standard.

2- Solutions de base réalisables

1) Combien y a-t-il au plus de solutions de base réalisables pour un programme linéaire sous forme standard comportant n variables et m contraintes ?

2) Soit le P.L. suivant :

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R} \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{6}$$

avec

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 5; x_2 \leq 5; \mathbf{x} \geq 0\} \tag{7}$$

et $\mathbf{c} = (1, 3)$.
(a) Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}_R$.
(b) Mettre ce P.L. sous la forme standard : $\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ avec $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
(c) Déterminer toutes les solutions de base ; dessiner la projection des solutions de base réalisables dans le plan (x_1, x_2).

3- Condition suffisante d'optimalité
Soit

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B^* \\ \mathbf{x}_H^* \end{pmatrix} \tag{8}$$

avec $\mathbf{x}_H^* = 0$ une solution de base réalisable du programme linéaire (PL).
1) Pour toute solution réalisable $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$, montrer que

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + (\mathbf{c}_H^T - \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A_H)\mathbf{x}_H \tag{9}$$

2) En déduire une condition suffisante - dite condition d'optimalité - pour que $\mathbf{x}^*$ soit une solution optimale.

4- Application de la condition d'optimalité
On considère le problème de maximiser $F(x_1; x_2) = 18x_1 + 23x_2$ pour $x_1; x_2 \geq 0$ soumis à la condition $2x_1 + 3x_2 \leq 3$. On notera x_3 la variable d'écart associée à la contrainte. Montrer à l'aide de l'exercice 3 et sans calculer aucune valeur de F, que $(x_1, x_2, x_3) = (3/2, 0, 0)$ est une solution optimale.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

5- Propriétés géométriques des solutions réalisables et des solutions de base
On note D_R l'ensemble des solutions réalisables de (LP). C'est-à-dire l'ensemble des vecteurs vérifiant les contraintes de (PL):

$$D_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\; x \geq 0.\} \tag{10}$$

On dit qu'un point $\mathbf{x} \in D_R$ est un sommet si c'est un point extrêmal de D_R.
1) Montrer que l'ensemble D_R est convexe.
2) Montrer que toute solution de base réalisable est un sommet de D_R (raisonner par l'absurde).
3) Inversement, montrer que tout sommet $\mathbf{x}$ de D_R est une solution de base. *Indication:* montrer que les colonnes A^j de la matrice A pour lesquels $x_j > 0$ forment nécessairement une partie libre.
4) On suppose que D_R est borné et que l'optimum de F existe. Montrer que l'optimum est atteint en un sommet de D_R.
On admettra le résultat suivant (Théorème de Krein-Milman) : Si D_R est non-vide et borné, tout point de D_R est combinaison convexe des sommets (en nombre au plus $n+1$).

6- Un premier algorithme de résolution par exploration exhaustive

L'exercice précédent indique que si (PL) possède une solution optimale finie, elle est atteinte en un sommet de D_R. De plus, les sommets sont exactement les solutions de bases réalisables.

1) Combien D_R a-t-il au plus de sommets ?

2) Caractériser les sommets de D_R par un système linéaire à résoudre.

Un premier algorithme consiste alors à parcourir toutes les solutions de base réalisables possibles. Pour chacune d'elles, il faut calculer la valeur de la fonction objectif F. On retient la solution optimale qui donne la valeur maximale de la fonction objectif.

3) Ecrire l'algorithme décrit ci-dessus.

4) Déterminer le coût de cet algorithme.