TD2 - Propriétés des solutions

Arthur Garnier

1 Solutions de base

$\mathbf{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{Ax} = b \triangleq \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$F(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}; \mathbf{C} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $B = \{4, 5\}$ possible
- B = {3, 5} ?

$det \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$

$H = \{1, 2, 4\}, B = \{3, 5\}$

Solution de base associée à B ?

$\mathbf{x}_H = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, e_1 = 0$

$\mathbf{x}_B$ solution de :

$$A_B x_B \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_3 = 9 \\ 5x_3 + e_2 = 8 \end{cases}$$

$A = [A_B|A_H]; \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ e_2 \end{bmatrix}; \mathbf{x}_H = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

Donc $x_3 = \frac{9}{-3} = -3; e_2 = 8 - 5 \times (-3) = 8 + 15 = 23$

Conclusion : On a $x_3 < 0$ donc il n'existe pas de solution de base associée à $B = \{3, 5\}$

2 Solutions de base réalisables

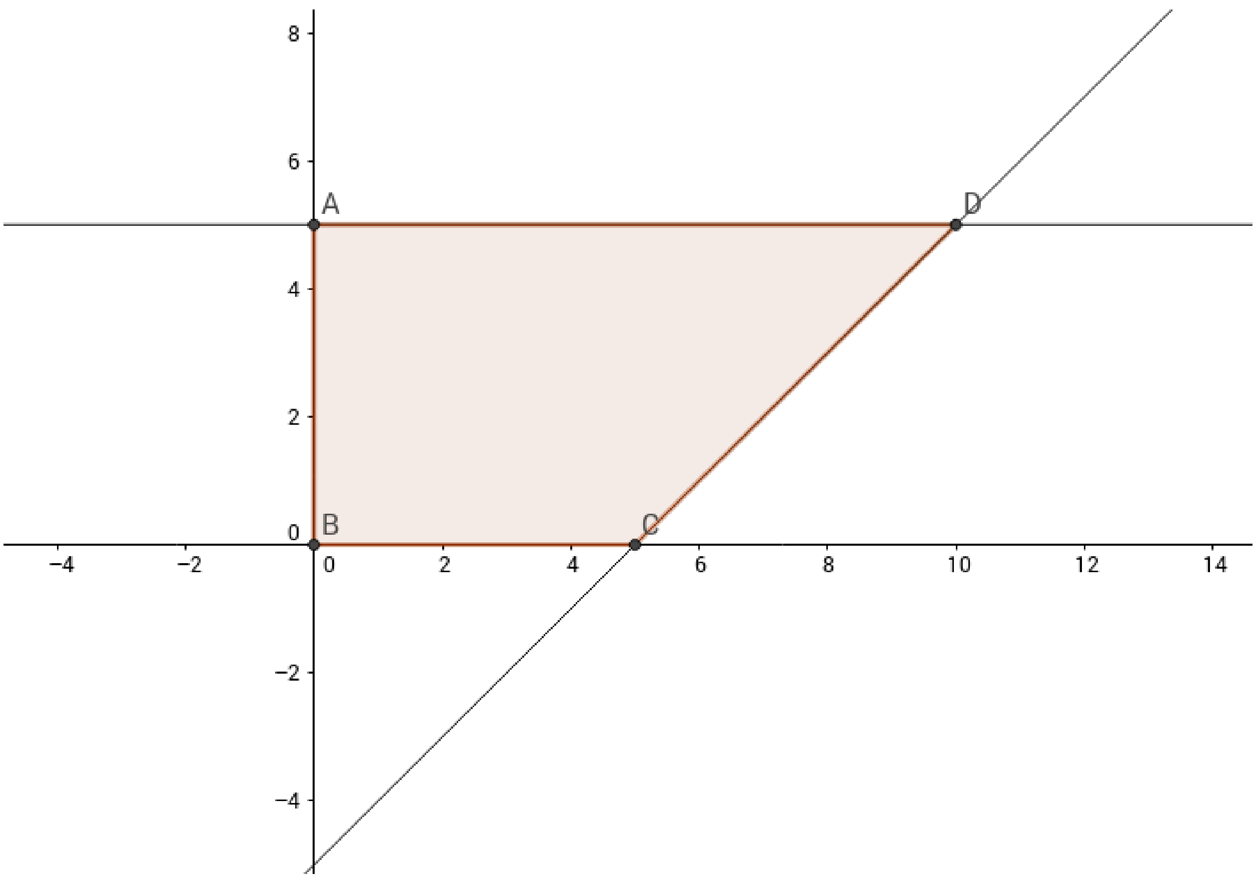
(PL) avec n variables et m contraintes.

Il y a donc au plus $\binom{n}{m}$ choix de base possible (certains choix peuvent ne pas donner une base). A chaque base correspond au plus 1 solution de base (réalisable).

On a $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}b$. Mais il se peut que certaines composantes de $\mathbf{x}_B$ soient négatives $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ non réalisable

$(PL) : max[F = [1, 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}]$ avec les contraintes :

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D_R = \{\mathbf{x}\ in\mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 \leq 5; x_2 \leq 5; \mathbf{x} \geq 0\}$



Forme standard :

On ajoute 2 variables d'écart e_1ete_2 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + e_1 = 5 \\ x_2 + e_2 = 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ e_1 \geq 0 \\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

- n=4 ; m=2

Il y a eu plus $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 6$ solutions de base réalisables.

$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

On passe en revue les différentes base possible :

$B={1, 2}

$x_B^{(1)} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$; $x_H^{(1)} = \begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A_B = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$; $A_B x_B^{(1)} = \begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 5 + x_2 = 10\\x_2 = 5\end{cases}$$

$x_B^{(1)} = \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ a ses deux composantes ≥ 0 donc $x^{(1)} = \begin{bmatrix}x_B^{(1)}\\0\end{bmatrix}$ est une solution de base réalisable

3 Exercice 3 : Condition d'optimalité

3.1

Indication : Exprimer en fonction des variables hors base x_H

$x^* = \begin{pmatrix}x_B^*\\x_H^* = 0\end{pmatrix}$ une solution de base réalisable

$Ax^* = b; x^* \geq 0$

$A = (A_B|A_H)$

$F(x) = c^T x$

Soit x une solution réalisable $Ax = b; x \geq 0$

$x = \begin{pmatrix}x_B\\x_H\end{pmatrix}$; mais $x_H \neq 0$

$F(x) =?F(x^*) + (c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H)x_H$

$F(x) = c^T x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = c_B^T x_B + c_H^T x_H$

$Ax = b$

$(A_B|A_H)\begin{pmatrix}x_B\\x_H\end{pmatrix} = b$

$A_Bx_B + A_Hx_H = b$

$A_Bx_B = b - A_Hx_H \Leftrightarrow A_B^{-1}A_Bx_B = A_B^{-1}(b - A_Hx_H)$

$A_B^{-1}A_B = Id$

$x_B = A_B^{-1}(b - A_Hx_H) + c_H^T x_H = c_B^T A_B^{-1} b - c_B^T a_B^{-1} A_H x_H + c_H^T c_H$

$F(x) = c_B A_B^{-1} b + (c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H)x_H$

$F(x^*) = c^T x^* = c^T \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_H^* = 0 \end{pmatrix} = c_B^T x_B^*$

$x_B^* = A_B^{-1} b \Rightarrow F(x^*) = c_B^T A_B^{-1} b$

3.2

$\forall x \in D_R (\to A_x = b; x \geq 0); F(x) = F(x^*) + L_H^T x_H$ avec $L_H^T = C_H^T - C_B^T A_B^{-1} A_H$ (vecteur ligne des couts réduits)

Si $L_H^T \leq 0$ alors $L_H^T x_H \leq 0$

$\forall x \in D_R; F(x) \leq F(x^*) \Leftrightarrow F(x^*) = max(F(x^*))$