TD1: Modélisation

1- Résolution graphique d'un programme linéaire (problème de production)
Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 en utilisant 4 machines $M_1, \ldots, M_4$. Chacun de ces deux produits nécessite un temps de passage donné (en heures) sur chacune des 4 machines. Les temps de passage par unité de produit sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque machine n'est disponible que pendant une certaine durée, également indiquée dans le tableau.

	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	0h	1.5h	2h	3h
P_2	3h	4h	3h	0h
disponibilité	39h	60h	57h	57h

Les produits P_1 et P_2 rapportent respectivement les bénéfices $B_1 = 1700$ euros et $B_2 = 3200$ euros par unité. On cherche à déterminer le plan de production pour maximiser le bénéfice total.
1) Modéliser ce problème sous la forme de *programmation linéaire* (problème de type PL). Donner la forme canonique pure et la forme standard du programme linéaire.
2) Résoudre *graphiquement* le PL.

2- Le problème du restaurateur
Un restaurateur a constaté que sa clientèle aime les coquillages. Lorsqu'il en propose dans son restaurant, ses clients les consomment jusqu'à épuisement de sa livraison du jour. Sa carte comporte deux plateaux :

- un plateau "riche" à P_r euros qui comporte n_1^r oursins, n_2^r palourdes, n_3^r huîtres.
- un plateau "simple" à P_s euros qui comporte n_1^s oursins, n_2^s palourdes, n_3^s huîtres.

1) Un jour donné, son fournisseur lui a livré k_1 oursins, k_2 palourdes et k_3 huîtres. Comment doit-il répartir les coquillages entre les deux sortes de plateaux pour réaliser un chiffre d'affaire maximal ? Modéliser ce problème sous forme de programmation linéaire. Ecrire la forme canonique pure et la forme standard du PL.
2) En début de soirée, une de ses amies vient le trouver. Elle a plus d'invités que prévu et manque de coquillages alors que les magasins sont fermés. Elle lui propose de lui racheter tous ses coquillages. Quel prix minimum peut-elle proposer pour chaque oursin, chaque palourde et chaque huître afin qu'il ne soit pas tenté d'en conserver une partie pour composer quelques plateaux ? Modéliser ce nouveau problème et comparer-le au précédent.

3- Modélisation d'un problème nutritionnel
Charlotte se demande combien d'argent elle doit dépenser en nourriture pour subvenir à ses besoins quotidiens en énergie (2000 kcal), en protéine (55g) et en calcium (800mg). Elle choisit 6 aliments qui semblent être des sources bon marché d'éléments nutritifs. Les données nutritionnelles de ces aliments sont reportées dans le tableau ci-dessous.

aliments	taille des portions	énergie(kcal)	protéine(g)	calcium(mg)	prix par portion(cts)
flocons d'avoine	28g	110	4	2	11
poulet	100g	205	32	12	140
oeuf	2 gros	160	13	54	100
lait entier	237 ml	160	8	285	52
tarte aux cerises	170 g	420	4	22	132
porc aux haricots	260 g	260	14	80	105

Sur les conseils d'un nutritioniste, Charlotte décide de limiter le nombre de portions de chacun des 6 aliments pour éviter par exemple de prendre 10 portions de porc aux haricots qui couvriraient tous ses besoins pour un prix de $10,5$ euros. Les limitations sont les suivantes :

- *flocons d'avoine* : 4 portions au plus par jour
- *poulet* : 3 portions au plus par jour
- *oeuf* : 2 portions au plus par jour
- *lait entier* : 8 portions au plus par jour
- *tarte aux cerises* : 2 portions au plus par jour
- *porc aux haricots* : 2 portions au plus par jour

Charlotte veut connaître le nombre de portions (les quantités) de chacun des 6 aliments nécessaires pour couvrir tous ses besoins en énergie, en protéines et en calcium, en dépensant le moins d'argent possible (en centimes d'euros), tout en respectant les limitations sur les quantités mentionnées ci-dessus.
1) Modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire. Ecrire les contraintes sous la forme matricielle $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{d}$ en précisant ce que valent la matrice A et les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$.
2) Ecrire le problème de programmation linéaire sous la forme standard $\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}$ avec $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$.

4- Répartition de tâches

On découpe un programme en n procédures (tâches) que l'on veut exécuter sur un ordinateur possédant m processeurs. A chaque procédure effectuée sur un processeur donné, il correspond un coût en temps de calcul. Ainsi pour la procédure i exécutée sur le processeur j, le coût est $c_{ij} > 0$. Chacune des n tâches doit être effectuée par un et un seul processeur. Mais chaque processeur peut exécuter plusieurs tâches ou pas du tout. On cherche à minimiser le coût total d'exécution des n procédures.
1) Modéliser ce problème sous forme d'un problème de programmation linéaire faisant intervenir des variables binaires x_{ij}, c'està-dire $x_{ij} \in \{0, 1\}$.
2) Modéliser également la variante suivante (plus réaliste...) qui consiste minimiser le plus grand coût d'exécution.

5- Stockage

Une entreprise de service vidéo à la demande (vod) stocke tous ses fichiers vidéos sur un ensemble de disques durs identiques qui ont tous la même taille. L'entreprise souhaite utiliser le minimum de disques durs pour le stockage. Elle dispose de n fichiers vidéo de taille $c_1, \ldots, c_n$ avec m disques durs identiques de taille C. On stocke tous les fichiers sur les disques durs. Pour qu'un stockage soit admissible il faut que la somme des tailles des fichiers stockés sur un disque soit inférieure ou égale C (on ne peut pas dépasser la capacité d'un disque...). De plus, un fichier n'est stocké qu'une seule fois sur un seul disque. Déterminer un stockage consiste alors à déterminer sur quel disque j est stocké le fichier i donné. On cherche à déterminer le stockage (admissible) des fichiers sur les disques durs de façon à minimiser le nombre de disques durs utilisés. En considérant (entre autres) les variables binaires y_j pour indiquer si le disque dur j est utilisé ou non, modéliser ce problème par un programme linéaire portant uniquement sur des variables binaires.

6- Affectation de bureaux

Une entreprise va emménager dans de nouveaux locaux. Ceux-ci se composent de n bureaux identiques. Chacun de ces bureaux peut accueillir indistinctement l'un des n services de l'entreprise. La disposition des bureaux est connue et on note d_{jl} la distance entre les bureaux j et l. L'entreprise a effectué dans les anciens locaux des statistiques sur les va-et-vient entre les n services à installer dans les n bureaux. Elle dispose du nombre c_{ik} de fois où des employés vont du service i au service k et où des employés vont du service k au service i. L'entreprise souhaite affecter les services aux bureaux de sorte que la distance totale parcourue par les employés soit la plus petite possible.

1) Combien y-a-t-il de possibilités d'affecter les n services aux n bureaux ? L'ordinateur dont vous disposez peut effectuer 10^9 (1 milliard) opérations à la seconde. Pour $= 30$, estimer le temps mis pour obtenir par une méthode exhaustive (c'est-à dire en essayant toutes les solutions), l'une des meilleures configurations donnant la distance totale parcourue minimale (indication : $30! \simeq 10^{32}$).

2) Modéliser le problème qui consiste à placer les services dans les bureaux de manière à minimiser la somme des distances parcourues par les employés. Vous pourrez introduire une variable binaire qui indique si un service donné est placé ou non dans un bureau donné. Vous obtiendrez ainsi un problème de programmation quadratique.

3) Transformer le modèle quadratique précédent en un problème de programmation linéaire en introduisant une variable à 4 indices.

7- Gestion de projets (extrait du partiel de GRO 2012)

Les élèves d'une célèbre école d'ingénieurs de l'Est de la France doivent réaliser en 2 ème année un Projet d'Introduction Douloureuse la Recherche (PIDR). L'enseignant responsable des Projets est chargé de répartir les projets entre élèves. Il y a autant d'élèves que de projets et chaque élève doit être affecté à un projet et un seul. De même, chaque projet doit être attribué à un élève et un seul. Il y a n projets ($n \geq 3$). Pour décider de la répartition des projets, l'enseignant demande à chaque élève de choisir 3 projets parmi les n et de les classer par ordre strictement croissant de préférence. Chaque projet retenu par un élève se voit ainsi attribué une note de 1 à 3 et on considère que les projets non-retenus par l' élève ont la note 0. L'idée de l'enseignant (qui veut œuvrer pour le bien collectif) est de maximiser la satisfaction générale. Cette satisfaction est définie comme étant la

somme (ou la moyenne) des notes données par les élèves aux projets auxquels ils sont affectés. Il vous est demandé de venir en aide à l'enseignant en mettant en œuvre toutes vos compétences acquises en programmation linéaire.
1) Modéliser ce problème sous forme de programmation linéaire, afin de déterminer une répartition optimale des projets en maximisant la satisfaction générale. Vous introduirez une matrice E des notes projets/élèves dont les coefficients sont les notes données par les élèves à chaque projet.
2) Pour $n = 4$, donner un exemple de matrice E des notes projets/élèves. Pour $n = 4$, écrire le problème de programmation linéaire obtenu précédemment, sous la forme

$$\max_{\mathbf{x}}[F(x) = \mathbf{e}^T\mathbf{x}] \tag{1}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \in [0,1]^{n^2} \tag{3}$$

en précisant la variable $\mathbf{x}$ et en explicitant les vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{b}$ ainsi que la matrice A.
3) La modélisation précédente souffre d'un manque de considération individuelle ... Dans la répartition optimale précédente, des élèves peuvent très bien se voir attribuer des projets qu'ils n'avaient pas classés initialement (i.e. avec la note 0). L'enseignant décide alors que chaque élève doit être affecté à un projet parmi les 3 projets classés initialement.
(a) Modéliser cette nouvelle contrainte.
(b) Pour $n = 4$, écrivez cette contrainte sous la forme

$$B\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \tag{4}$$

en explicitant la matrice B et le vecteur $\mathbf{d}$.
(c) Donner un exemple de matrice des notes projet/élève pour laquelle il n'y a pas de solution réalisable au problème (1)-(4).

8- Problème d'une entreprise de vols "charter"

Une compagnie aérienne de vols "charter" doit effectuer sur une plage de temps donné, un certain nombre de vols pour lesquels on connaît :

- AD_i : l'aérogare de départ
- AA_i : l'aérogare d'arrivée
- HD_i : l'heure de départ
- HA_i : l'heure d'arrivée

Un avion peut effectuer un vol j à la suite d'un vol i à condition qu'un intervalle de temps suffisant existe entre l'arrivée de i l'instant HA_i en AA_i et le départ de j à l'instant HD_j en AD_j de manière à permettre éventuellement son transfert en vol à vide de AA_i à AD_j qui dure T_{ij} et la préparation du vol suivant qui dure p. Pour leur premier vol, on suppose les avions disponibles au bon endroit et

après leur dernier vol, on les laisse là où ils viennent d'atterir.
1) Un premier problème à résoudre consiste à minimiser le nombre total d'avions nécessaires.
2) Un deuxième problème consiste à fixer le nombre d'avions et à minimiser la durée des trajets à vide. Modéliser ces deux problèmes de programmation linéaire sous les formes canonique puis standard.

9- Modélisation du problème du voyageur de commerce par programmation linéaire
Le problème du voyageur de commerce s'énonce de la façon suivante. Etant données n villes, trouver le plus court trajet passant par toutes les villes une et une seule fois, en revenant à à la fin du trajet. Le but de cet exercice est de modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire (modélisation due à Miller-Tucker-Zemlin, 1960). On introduit les variables d'affectation x_{ij}

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si on va de la ville } i \text{ à la ville } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{5}$$

On introduit les variables supplémentaires u_i pour $1 \leq i \leq n$, représentant la position de la ville i dans la tournée du voyageur. On suppose que la ville 1 est la ville de départ, on a donc $u_1 = 1$ et par ailleurs $u_i \in \{2, \dots, n\}$.
1) Les variables x_{ij} et u_i sont liées par le fait que si $x_{ij} = 1$ alors nécessairement $u_i < u_j$. Montrer que cette contrainte peut se traduire algébriquement par

$$u_i - u_j + 1 \leq \alpha(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j, \ i \neq 1, j \neq 1 \tag{6}$$

où α est un réel déterminer.
2) On note d_{ij} la distance séparant la ville i de la ville j (a priori $d_{ij} \neq d_{ji}$). Modéliser le problème du voyageur de commerce sous forme d'un programme linéaire pour les variables x_{ij}, $(1 \leq i, j \leq n)$ et u_i, $(2 \leq i \leq n)$.

10- Identification de paramètres et programmation linéaire
On considère deux grandeurs physiques t et y qui sont liées entre elles par une relation fonctionnelle du type $y = f(t)$. On dispose d'un modèle pour la fonction f: on sait que f est une combinaison linéaire de n fonctions élémentaires $\phi_1, \dots, \phi_n$ connues :

$$f(t) = f_x(t) = x_1\phi_1(t) + \cdots + x_n\phi_n(t) \tag{7}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, , x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sont des paramètres réels qu'on cherche à identifier. Pour cela, on réalise une série de m mesures $(t_i, y_i)_{1 \leq i \leq m}$ et on cherche à minimiser le plus grand écart absolu entre le modèle donné par f_x et les mesures :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \max_{1 \leq i \leq m} |\mathbf{f}(t_i) - y_i| \tag{8}$$

Remarque : si l'on remplace l'objectif (8) par la somme des carrés des écarts (i.e. $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |f_x(t_i) - y_i|^2$) alors on obtient exactement la formulation en moindres carrés.

On note $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ les normes d'un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, , x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.
1) Ecrire le problème (8) sous la forme

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \triangleq \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{1\leq i\leq m} |(A\mathbf{x})_i - b_i|, \tag{9}$$

en précisant ce que valent le vecteur $\mathbf{b} = (b_1, , b_m)^T$ et la matrice $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$.
2) Transformer le problème précédent en un problème de programmation linéaire sous forme canonique pure. (Indication : introduire la variable $e = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} |A\mathbf{x})_i - b_i|$).
3) On considère à présent la fonction objectif

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 \triangleq \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m |(A\mathbf{x})_i - b_i| \tag{10}$$

Transformer ce nouveau problème en un problème de programmation linéaire sous forme canonique pure.