Programmation linéaire

Arthur Garnier

1 Introduction - Exemples

Exemple :

---

2 produits P1 et P2

Ressources :

	P1	P2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'oeuvre	4	5	55
matières premières	2	1	20

- P1 rapporte 6€ par unité
- P2 rapporte 4€ par unité

Question : Qulle quantité de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour rendre maximum le bénéfice total.

Choix des variables :

- x_1 = nombre d'unités de P1 produites
- x_2 = nombre d'unités de P2 produites

1.1 Fonction "objectif" à rendre maximum

Le bénéfice total est à rendre maximum : $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ (€)

1.2 Contraintes

Disponibilité des ressources se traduit par :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81(1) \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55(2) \\ 2x_1 + x2 \leq 20(3) \\ x_1 \geq 0(4) \\ x_2 \geq 0(5) \end{cases}$$

1.3 Formulation du problème

Chercher $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ rendant maximum $F(x_1, x_2) \triangleq 6x_1 + 4x_2$

sous les contraintes

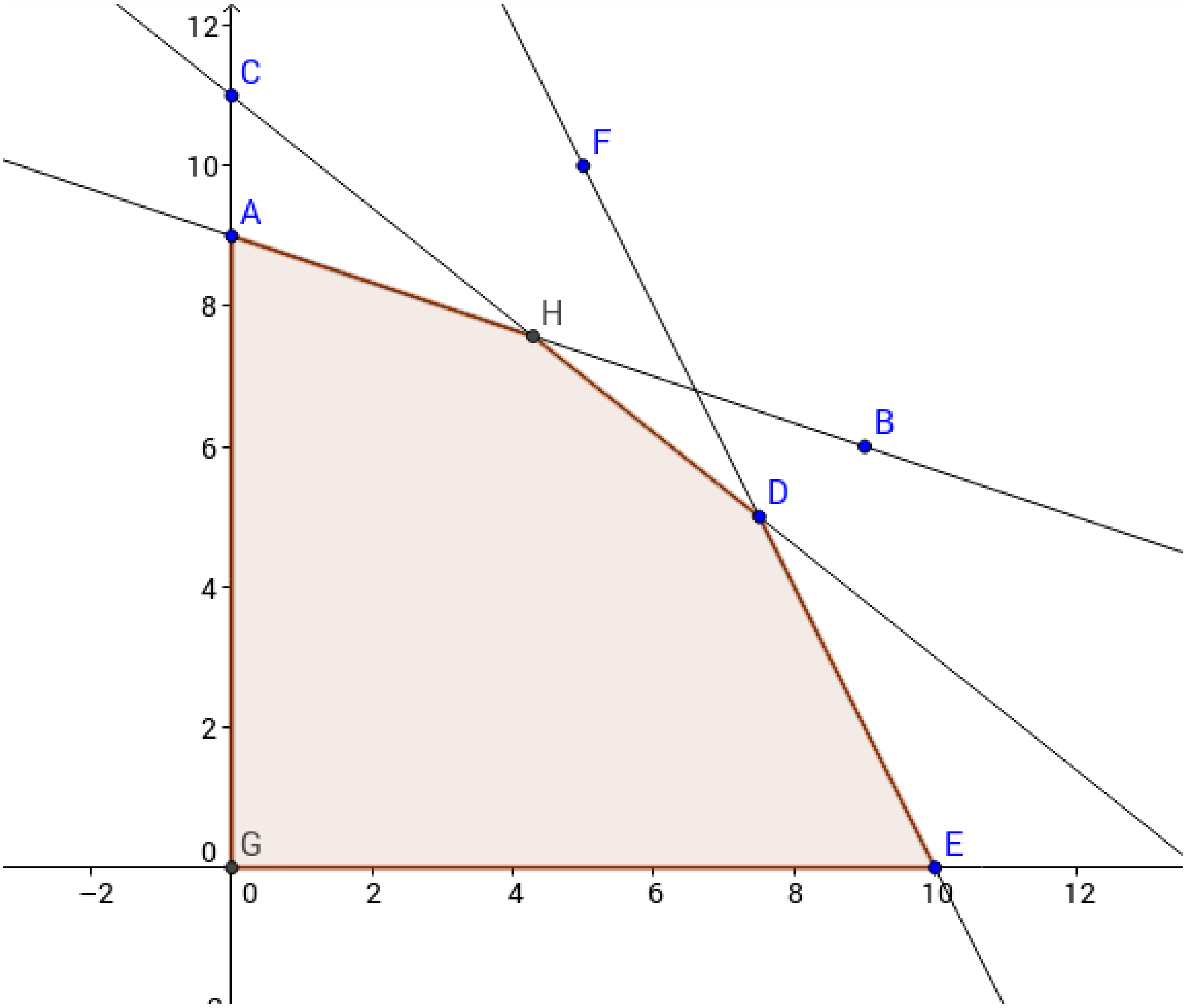
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.4 Résolution graphique

1.4.1

Dans le plan (x_1, x_2) chacune des contraintes (1), (2), (3), (4), (5) correspond à un demi-plan

- 1/2 plan (1) : $3x_1 + 9x_2 \leq 81$
- Points (0, 9) et (9,6)
- 1/2 plan (2) : $4x_1 + 5x_2 \leq 55$
- Points (0,11) et (15/2, 5)
- 1/2 Plan (3) $2x_1 + x_2 \leq 20$
- Points (10,0) et (5,10)



On cherche (x_1, x_2) dans la zone colorée : C'est un polygone à 5 côtés.

1.4.2 Recherche de l'optimum du bénéfice

$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ soit $c \geq 0$ un bénéfice à atteindre

$6x_1 + 4x_2 = c$

C'est la droite :

- $x_2 = \frac{1}{4}(c - 6x_1)$
- $x_2 = -\frac{6}{4}x_1 + \frac{c}{4}$

Quand c varie, on obtient l'équation d'une famille de droites parallèles entre ellers (car de même coefficient directeur $-\frac{6}{4}$) et d'ordonnée à l'origine $\frac{c}{4}$

On constate graphiquement que l'optimum est atteint pour $x_1 = \frac{15}{2}$ et $x_2 = 5$: C'est intersection des droites $4x_1 + 5x_2 = 55$ et $2x_1 + x_2 = 20$

- Le bénéfice maximum est donc : $F(15/2, 5) = 6 \times \frac{15}{2} + 4 \times 5 = 65$€

- Main d'oeuvre et matière première sont utilisées à leur maximum
- Equipement pas utilisé au maximum car : $3 \times \frac{15}{2} + 9 \times 5 = 22,5 + 45 = 67.5 < 81$

2 Forme canonique et forme standard d'un PL

("PL" = "problème de programmation linéaire")

Notations :

- $X \in \mathbb{R}^n : X \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$ vecteur inconnu
- $c \in \mathbb{R}^n$: Vecteur de la fonction coût (ou "objectif")
- $F(x) = c^T x = [c_1, c_2, ...c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n$
- Matrice des m contraintes
- $\begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & ... & ...a_{m,n} & \end{bmatrix}$ (m lignes (nombre de contraintes) et n colonnes (nombre d'inconnues))
- $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
- $b \in \mathbb{R}^m, b \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$
- Contrainte n°i est : $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} X_j \leq b_i, 1 \leq i \leq m$
- Définition 1 :

Un problème de type PL est dit sous forme "canonique" s'il s'écrit :

$$\begin{cases} max(\mathbf{C}^T\mathbf{x})(1) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(2) \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

(2) signifie que $(\mathrm{A}\mathbf{x})_{\mathrm{i}} \leq b_i, i = 1...m$
(3) signifie que $x_j \geq 0, j = 1...n$

- Définition 2 :

Un problème PL est dit sous forme “standard” si il s'écrit :

$$\begin{cases} max(C^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Cas particulier

Forme “simpliciale” :

1. Il y a davantage d'inconnues que de contraintes
2. La matrice A s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} H \end{bmatrix}$$

$H \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = [I_2 H], \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$A = [I, H]$ structure “bloc”.

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_{n-m} \end{bmatrix}$

$A\mathbf{x} = [I, H] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_{n-m} \end{bmatrix}$

$A\mathbf{x} = I\mathbf{x}m + H\mathbf{x}_{n-m} = \mathbf{x}_m + H\mathbf{x}_{n-m}$

Contraintes : $A\mathbf{x} = b$: $\boxed{\mathbf{x} + H\mathbf{x}_{n-m} = b}$ (1)

(1) se réécrit composante par composante :

$$x_1 + \sum_{j=1}^{n-m} H_{ij} x_{j+m} = b_1$$

$$\vdots$$

$$x_m + \sum_{j=1}^{n-m} H_{ij} x_{j+m} = b_m$$

Proposition : Tout PL sous forme canonique peut s'écrire sous forme standard et inversement.

Démonstration :

1. On considère un PL sous forme canonique. Les contraintes sons :

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, 1 \leq i \leq m \text{ (m contraintes)}$$

On rajoute m nouvelles inconnues au vecteur $\mathbf{x}$, appellées “varables d'écart”.

$e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i; e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$

On note $\tilde{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, **x** \in \mathbb{R}^n, **e** \in \mathbb{R}^m$

On a :

$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [A|I_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = b \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{A} \triangleq [A|I_m] \\ \tilde{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Conclusion : Le problème PL se réécrit :

$$\begin{cases} max(\tilde{C}^T\tilde{x}) \\ \tilde{A}\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

$\tilde{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix}$
$\tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

2. Réciproquement on part d'un PL sous forme standard

$$\begin{cases} max(\mathbf{c}^T\mathbf{x})(1) \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}(2) \\ \mathbf{x} \geq 0(3) \end{cases}$$

$$(2) : A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ (-A)\mathbf{x} \geq (-\mathbf{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$\hat{A}x \leq \hat{b}$

$\hat{A}M_{2m,n}(\mathbb{R}), \hat{b} \in \mathbb{R}^{2m}$

On a doublé le nombre de contraintes !

3. Solutions réalisables - Solutions de base

PL sous forme standard

$$\begin{cases} max(\mathbf{c}^T\mathbf{X}) \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{cases}$$

Hypothèse sur A :

- $m \leq n$ (sous contrainte)
- rang(A) = m (rang maximum)

$A = [A^1, A^2, ..., A^n]$

"Rang A = m" veut dire qu'il y a m vecteurs indépendants parmis $A^1, ..., A^n$

C'est à dire : L'ensemble des vecteurs de la forme : $X_1A^1 + x_2A^2 + ...X_nA^n$ représente $\mathbb{R}^m$ entier.

Exemple :

$X_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + X_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + 2X_2 + 4X_3 \\ 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \end{bmatrix}$

Ces vecteurs satisfaisant $y = 2X$ On n'obtient pas $\mathbb{R}^2$ entier

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ n'est pas de rang 2 !

Définition 1 :

On appelle "solution réalisable" un $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

NB : Une solution réalisable n'est PAS (en général) solution du problème PL!

Parmi les solutions réalisables on distingue les solutions de base.

$B = j_1, j_2, ..., j_n \subset 1, 2, ..., n$ ensemble d'indices tel que les colonnes $A^{j_1}, A^{j_2}, ..., A^{j_n}$ soient indépendantes.

$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,j} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,j} & a_{m,n} \end{bmatrix}$

$j_1, j_2, ... =$ m indices de colonnes telque $(A^{j_1}, A^{j_2}, ..., A^{j_n})$ indépendantes

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, solution réalisable.

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ les composantes $x_1, ..., x_n$ se répartissent en 2 paquets :

1. $\mathbf{x}_B = composants \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{bmatrix}$ "composantes de base"
2. $\mathbf{x}_H =$ composants $[X_j]j \ni B$ "composants de base" On place $\mathbf{x}_b$ en tête de $\mathbf{x}, \mathbf{x}_H$ en 2ème.

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{bmatrix}$: m composants de base, n-m composants hors base.

$A = [A_B|A_H]$

$A_B = col(A^{j1}...A^{jn})$

$A_H = col(A^j)j \neq jl, l = 1...m$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit $[A_B, A_H] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{bmatrix} = \mathbf{b}$

$A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H = \mathbf{b}$

$A_B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})(A_B : m \times m)$

$A_H \in \mathbb{M}_{m,n-m}(\mathbb{R})(A_B : m \times m(n-m))$

Les composantes de base s'expriment en fonction des composantes hors base :

$A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H = b$

$A_B\mathbf{x}_B = b - A_H\mathbf{x}_H$

$\mathbf{x}_B = A_B^{-1}[b - A_H\mathbf{x}_H]$

car A_B = matrice carrée $m \times m$ **inversible** !

Définition 2 :

On dit que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H] \end{bmatrix}$, solution réalisable est une solution de base (associée à B) si $\mathbf{x}_H = 0$

Exemple : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(PL) : $max(6x_1 + 4x_2)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} \begin{bmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix}$

Les colonnes n°3,4,5 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$ et $x_H = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

$A_H = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{bmatrix}$

$A\mathbf{x} = A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H$

Faisons $\mathbf{x}_H = 0$

$A\mathbf{x} = A_B\mathbf{x}_B$

$\mathbf{x}$ solution “réalisable de base” signifie :

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = b \\ x_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_B x_B = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 81 \\ e_2 = 55 \\ e_3 = 20 \end{cases}$$

Donc $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 81 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix}$ est solution de base associé à la base $B = \{3, 4, 5\}$

Le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 81 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix}$ n’est pas solution optimale. Car la solution optimale de cet exemple était $e_2 = 0 ete_3 = 0$ (main d’oeuvre et matières première utilisées au maximum)

$e_1 = 81 - [3 \times \frac{\pi}{2} + 9 \times 5] = \frac{27}{2}$

On constatate que $(\frac{27}{2}, 0, 0) \neq (81, 55, 20)$

Théorème fondamental : On considère un problème PL de matrice des contraintes $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ avec $rang(A) = m$. Alors on a :

1. S’il existe une solution $\mathbf{x}$ réalisable, il existe nécessairement une solution de base.
2. S’il existe une solution optimale, il existe une solution de base optimale.

Conclusion pratique :

Pour chercher $\mathbf{x}$ solution de

- $max(c^T x)$
- $A_x = b$

4 Convexité

Définition 1 : Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est un “polyèdre convexe” si K est une intersection d’hyperplan (n=2 : “droite”, n=3 : “plan”, n>3: “hyperplan”)

Définition 2 : Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x, y \in E, [x, y] \subset E$

Si $\mathbf{xx}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ est l'ensemble des points $\mathbf{z}$ de corrdonnées :

$$\mathbf{z}\begin{bmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \end{bmatrix}, 0 \leq x\ leq 1$$

On considère un problème PL de matrice des contraintes A. On note $D_R = \{x \in \mathbb{R}^n / \mathbf{A}x = b, x \geq 0\}$ l'ensemble des solutions réalisables.

Proposition : L'ensemble D_R est un polyèdre convexe.

Exemple :

$D_R\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ (c'est un triangle dans $\mathbb{R}^3$)

Définition : On appelle sommet de D_R tout point $\mathbf{x} \in D_R$ tel qu'il n'existe pas de décomposition de $\mathbf{x}$ de la forme : $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}, \mathbf{x} \neq \mathbf{z}, y, z \in D_R$

Théorème 1 [Solutions de base et sommets] : $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est solution de base si et seulement si $\mathbf{x}$ est un sommet de D_R.

Théorème 2 [Solution optimales] : L'optimum de la fonction objectif est atteint au moins en un sommet de D_R.

Conclusion : Algorithme naïf de résolution d'un problème (PL) :

1. Lister tous les sommets de D_R (les solutions de base)
2. Calculer $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ en chaque sommet
3. Le(s) sommet(s) réalisent le maximum sont solutions.

5 Algorithme du simplexe (Introduction)

But : Obtenir une solution d'un problème de programmation linéaire de façon rapide même en grande dimension.

- "petite dimension" : n ≈ 100,200
- "grande dimansion" : n ≈ 10^6

PL : $max[F(x_1, x_2) \triangleq 6x_1 + 4x_2]$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2\ geq 0 \end{cases}$$

- Deux sommets réalisables sont "voisins" s'ils partages n-1 contraintes. Ici (n=2), 2 sommets sont voisons s'ils sont sur sur une même droite de contrainte.

Sommet réalisable	Sommet réalisables voisins
(0,0)	(10,0) et (0,9)

Sommet réalisable	Sommet réalisables voisins
(0,9)	$(\frac{25}{9}, \frac{169}{19})$ et (0,0)
$(\frac{25}{9}, \frac{169}{19})$	(0,9) et $(\frac{15}{2}, 5)$
$(\frac{15}{2}, 5)$	(10,0) et $(\frac{25}{9}, \frac{169}{19})$
(10,0)	(0,0) et $(\frac{15}{2}, 5)$

Intérêt des "sommets réalisables voisins"

Test d'optimalité

On considère un PL qui possède une solution optimale. Si un sommet réalisable ne possède aucun voisin "meilleur" que lui alors il est obligatoirement une solution optimale.

Exemple :

$(\frac{15}{2}$,5) **est** optimal car ses 2 voisins (10,0) et $(\frac{25}{9}, \frac{169}{19})$ ne sont pas meilleurs que lui :

- F$(\frac{15}{2}, 5)$: $6\frac{15}{2} + 4 \times 5 = 65$
- F(10,0) $= 6 \times 10 = 60$
- $F(\frac{25}{9}, \frac{169}{19}) = 51.18$

Chaque contrainte correspond à une droite :

- $\circ$: Sommets "réalisables"
- $\square$: Sommets "non réalisables"

5.1 Résolution itérative.

Algorithme :

- Initialisation :
- (0,0) = Sommet réalisable initial
- F(0,0)=0
- Directions allant vers les voisins $\circ x_1$ et $\circ x_2$. $F(x_1, 0) = 6x_1 > 0; F(0, x_2) = 4x_2 > 0$

Itération 1 : On choisit la direction avec le plus fort taux d'accroissement du score F. C'est $\circ x_1$. On bouge le long de $\circ x_1$ et on cherche le premier voisin.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = 10, 0$$

$F(10, 0) = 6 * 10 = 60$

Test d'optimalité :

Supposons qu'on bouge le long de la droite $2x_1 + x_2 = 20$

$10 \rightarrow 10 - \delta \triangleq x_1$

$2x_1 + x_2 = 20$

$x_2 = 20 - 2x_1 = 20 - 2(20 - \delta) = 20 - 20 + 2\delta = 2\delta$

$F(10 - \delta, 2\delta) = 6(10 - \delta) + 4 \times 2\delta = 60 - 6\delta + 8\delta = 60 + 2\delta$

Itération 2 :

On choisit la direction de la droite $2x_1 + x_2 = 20$ vers le haut. On stoppe au premier voisin dans cette direction. C'est le sommet solution de

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ 4x_1 + 5x_2 = 55 \end{cases} \quad \Leftrightarrow (x_1 = \frac{15}{2}, x_2 = 5)$$

- Test d'optimalité : Le score F décroît dans la direction allant vers $(\frac{25}{9}, \frac{169}{19})$. Mais il décroit également en direction de (10,0) !

Critère d'optimalité : On a trouvé une solution optimale ! (merci Captain Obvious)

6 Algorithme du simplexe (Méthode des dictionnaires)

On suppose que (PL) est "non dégénéré"

1. $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}), m < n$ Davantage d'inconnues que de contraintes.
2. rang(A) = m, il existe m colonnes indépendantes dans A
3. Le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ n'est pas combinaison de P colonnes avec P<m

L'algorithme du simplexe consiste à chercher une solution de (PL) en générant une suite de solutions de base (correspond aux sommets réalisables).

L'algorithme a 2 phases :

Phase 1 : Trouver une solution de base qui sert de point de départ ou montrer qu'il n'en existe pas. Phase 2 : A partir de x_1, solution de base de coût $C^T x_1$, produire une solution optimale x^*. S'il n'existe pas de solution optimale, produire $x_k \in \mathbb{R}^n, C^T x_k \to +\infty$

Important : Si on sait faire la phase 2 pour tout problème (PL), alors, on sait aussi faire la phase 1.

Résumé de la phase 2 :

1. On dispose de $\mathbf{x}$ = état courant de base, associé à une base B de $\mathbb{R}^m, A = [A_B, A_H]$

On $\mathbf{x} = \mathbf{x}_b + \mathbf{x}_H = \mathbf{x}_B$

$\mathbf{x}_B = A_B^{-1} b$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{bmatrix}$

$F(\mathbf{x}) = C_B^T \mathbf{x}_B + C_H^T \mathbf{x}_H$

On a les contraintes :

- $A\mathbf{x} = b$
- $[A_B A_H] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{bmatrix} = b$
- $A_B x_B + A_H x_H = b
- A_Bx_B = b-A_H x_H$
- $\boxed{x_B = A_B^{-1}(b - A_H x_H)}$

- $F(x) = \mathbf{C}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}_B \\ \mathbf{C}_H\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H\end{bmatrix} = F(x) + [C_H^T - C_B^T A_B^{-1} A_H] x_H$

L_H^T s'appelle le "vecteur des coûts réduits"

Donc 2 cas :

1er cas : Toutes les composantes de L_H^T sont $\leq 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ est optimal

2eme cas : $\exists i_0, tq(L_H)_{i_0} > 0 \Rightarrow$ On peut continuer

2. Variable "entrante dans la basa B

$L_H^T = C_H^T - C_B^T A_B^{-1} A_H$
$e = Argmax(L_H^T)_{j,j} / (L_H^T)_j > 0$

3. Calcul de $z = A_B^{-1} A^e \in \mathbb{R}^m$

On calcule l'indice s de la "variable sortante"
$s = Argmin\frac{(XB)_i}{z_i}, i \in B/Z_i > 0$

4. LA nouvelle base B^*^ est déduite de B ajoutant l'indice et en ôtant l'indice s.

Illustration sur l'exemple de départ :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \ geq0 \end{cases}$$

Etape 1:

$x_1 = 0, x_2 = 0, e_1 = 81, e_2 = 55, e_3 = 20$

F=0 (SCORE)

Expression des variables de base en fonction des variables hors base.

$$\begin{cases} e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2 \\ e_3 = 20 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

$F(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = 6x_1 + 4x_2 = L_H^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$

$L_H = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Variable entrante : x_1

7 Algorithme des dictionnaires sur un exemple

Exemple : Problème de production

Itération 1 : Point initial :

- Solution de base : $x_1 = 0, x_2 = 0, e_1 = 81, e_2 = 55, e_3 = 20$

Score F $= 6 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

- La base est : $B = 3, 4, 5$ et $H = 1, 2$
- Expression des variables de base en fonction des variables hors base

On fait entrer x_1 ou x_2 dans la base.

$F(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = 6x_1 + 4x_2$

C'est x_1 qui entre dans la base, car $x_1 \leftarrow x_1 + 1 \Rightarrow F$ augmente de 6et $x_2 \leftarrow x_2 + 1 \Rightarrow F$ augmente de 4. Or $6 > 4$ donc c'est x_1 qui l'emporte.

- On fait $(x_1, x_2) \leftarrow (x_1, 0)$ dans l'expression de e_1, e_2, e_3

$$\begin{cases} e_1 = 81 - 3x_1 \\ e_2 = 55 - 4x_1 \\ e_3 = 20 - 2x_1 \end{cases}$$

On a :

- $e_1 = 0$ quand $81 - 3x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{81}{3}$
- $e_2 = 0$ quand $55 - 4x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{55}{4}$
- $e_3 = 0$ quand $20 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{20}{2}$

Donc, la valeur de $x_1 \geq 0$ minimum qui annule l'un des $e_i, i = 1, 2, 3$ est obtenue pour $x_1 = \frac{20}{2} = 10$

Car :

$x_1 = \frac{81}{3} = 27; x_1 = 13.75; x_1 = 10 \Rightarrow 10 < 13.75 < 27$

On fait sortir e_3. La variable de sortie est $e_s = e_3; s = 3$

Nouvelle base :

$B = \{1, 3, 4\}(x_1, e_1, e_2)$; $H = \{2, 5\}(x_2, e_3)$

Nouvelle solution de base :

$x_1 = 10; e_1 = 81 - 3 \times 10 = 51; e_2 = 55 - 4 \times 10 = 15; x_2 = 0; e_3 = 0$

Score $= F(x_1, x_2) = 6 \times 10 + 4 \times 10 = 60$

Itération 2 :

- Variables de base : x_1, e_1, e_2
- Variaboles hors base : x_2, e_3
- Expression des variables de base en fonction des hors base :
- $x_1 = \frac{1}{2}(20 - x_2 - e_3) = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3$

- $e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2 = 55 - 4(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 5x_2 = 16 - 3x_2 + 2e_3$
- Expression de e_1 :

On a : $3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \Leftrightarrow e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2 \Leftrightarrow e_1 = 51 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{3}{2}e_3$

$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 = 60 + x_2 - 3e_3$ (+1 en direction de $x_2 \Rightarrow x_2$ entre dans la base)

Le "dictionnaire" :

- $x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3$
- $e_1 = 51 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{3}{2}e_3$
- $e_2 = 15 - 3x_2 + 2e_3$

En conservant $e_3 = 0$, on constate que :

$x_2 = min(\frac{10}{\frac{1}{2}}; \frac{51}{\frac{15}{2}}; \frac{15}{3})$

$5 < 68 < 20$ donc la variable sortante est e_2

La nouvelle base correspond aux variables $(x_1, x_2, e_1) \Rightarrow B = \{1, 2, 3\}(x_1, x_2, e_1); H = \{4, 5\}(e_2, e_3)$

Expression de (x_1, x_2, e_1) en fonction de (e_2, e_3)

- $x_2 = 5 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$
- $x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6}e_2 - \frac{5}{6}e_3$
- $e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}e_2 - \frac{11}{2}e_3$

Calcul de F :

$F = 6x_1 + 4x_2 = 65 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{7}{3}e_3$

On descend dans les directions $(e_2, 0)et(0, e_3)$.

Conclusion : Fin de l'algorithme.

$\boxed{e_2^* = e_3^* = 0; F^* = 65; x_1^* = \frac{15}{2}; x_2^* = 5; e_1^* = \frac{27}{2}}$

7.1 Problème (PLA)

- $min(a_1 + a_2 + ... + a_m)$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + a_i = b_i, 1 \leq i \leq m$
- $X_j \geq 0, a_i \geq 0$

Idée : On applique l'algorithme au nouveau problème (PLA). On va montrer que l'on obtient à la fin de l'algorithme :

- soit une solution réalisable pour (PL)
- Soit le diagnostic qu'il n'y a pas de solution réalisable.

Simplexe pour (PLA) :

1. Valeur initiale :

$x^{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$

NB : On peut supposer ici $b \geq 0$ en multipliant par -1 les contraintes $b_i < 0$

x^{10} est une solution de base associée à $B = \{n+1, n+2, ...n+m\}$

2. L'algorithme du simplexe donne $(\tilde{X}_1...\tilde{X}_n, \tilde{a}_1...\tilde{a}_m)$

2 cas :

a. On a $min(a_1 + ... + a_m) = \tilde{a}_1 + ...\tilde{a}_m = 0$

Alors on a trouvé une solution, réalisable pour PL, qui est $\tilde{X}$! On effet $A\tilde{x} + \tilde{a} = b$ Donc $A\tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0$

b. $min(a_1 + ...a_m) = \tilde{a}_1 + ... + \tilde{a}_m > 0$

Dans ce cas, il n'existe pas de solution réalisable. En effet, s'il en existait une, on aurait un $x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 \geq 0$, tel que $Ax_0 = b$, donc le x'_0 valant $x'_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ a_0 = 0 \end{bmatrix}$ vérifierait $a_{0,1} + ... + a_{0,m} = 0 < \tilde{a}_1 + ... + \tilde{a}_m$ et x'_0 serait réalisable pour (LPA). C'est une contradiction !

Conclusion : A la fin de la phase 1, on a les deux cas de figure suivants :

1. L'algorithme du simplexe conduit à faire sortir toutes les varables artificielles a de la base. A la fin, on a donc $\tilde{a} = 0$, donc $A\tilde{x} = b$ On a donc une solution réalisable. On passe à la phase 2.
2. L'algorithme du simplexe ne fait pas sortir toutes les variables artificielles de la base. La base est dégénérée. Les lignes associées à ces variables sont des contraintes redondantes qu'on élimine.

Au total, bilan pratique de la phase 1 :

$F_{aux} = min_{x,a}(\sum_{i=1}^{m} a_i) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i$

1. Si $F_{aux} = 0$ et $\nexists a_j \in X_B$, où X_B = ensemble des variables de base pour (PLA). Fin normale de l'algorithme. $\tilde{X} \in \mathbb{R}$ = candidat initial pour la phase 2.
2. Si $F_{aux} = 0$ et $\exists a_j \in X_B$. Cas 'contraintes redondantes', on supprime les lignes associées auxi $a_j \in X_B$. Passage à la phase 2.
3. Si $F_{aux} > 0$, PAS de solution réalisable ($D_R = 0$). STOP
