Correction Examen 2014

Arthur Garnier

1 Exercice 3

1.1

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 9(D1) \\ x_1 + x_2 = 7(D2) \\ 2x_1 + x_2 = 12(D3) \end{cases}$$

Les points (x_1, x_2) qui satisfont la condition (1) sont les points du demi plan délimité par (D1) dans lequel est situé $(0, 0)$

De même pour les deux autres plans.

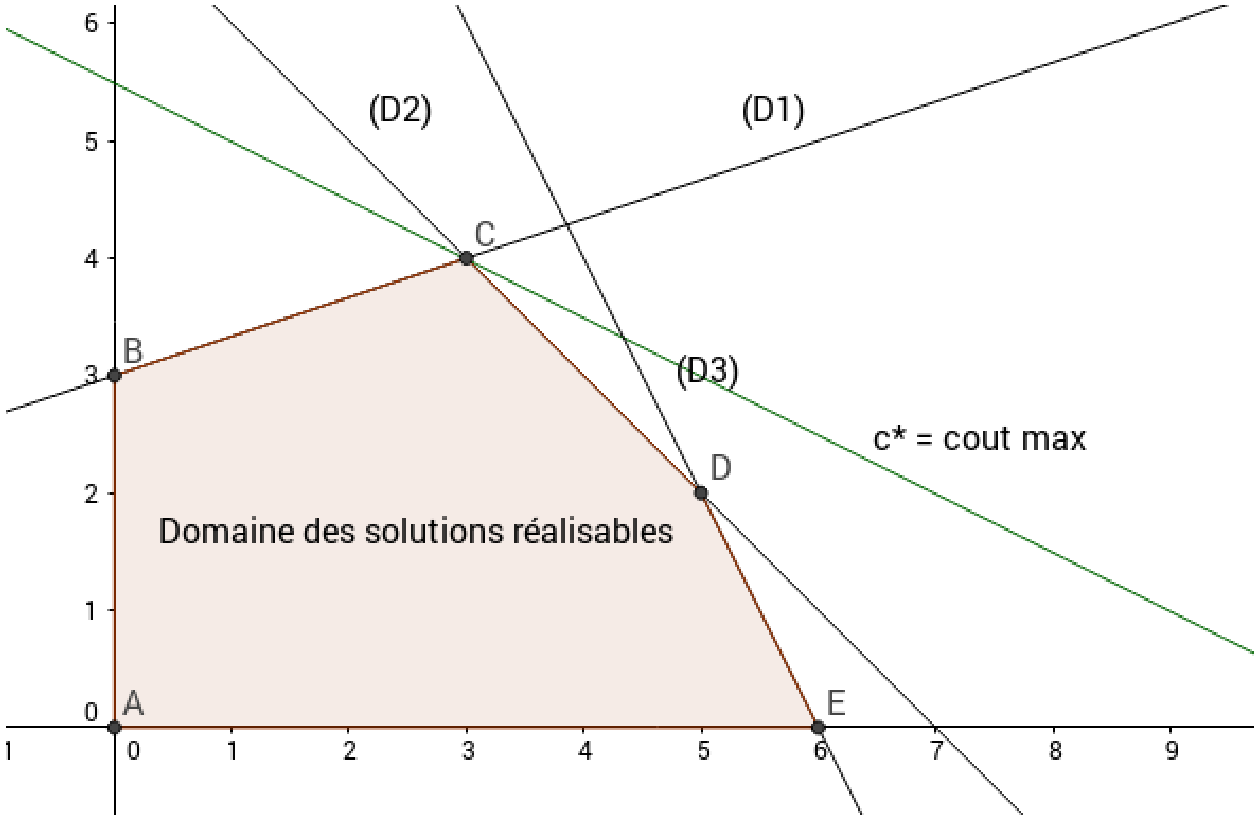
L'ensembledes solutions réalisables de (P) est le domaine coloré en rouge sur la figure.

Fonction coût :

$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 8x_2$

Pour un coût de valeur c, on a : $4x_1 + 8x_2 = c \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{c}{8}$

Droite de pente $-\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{c}{8}$



On constate graphiquement que la solution de (P) est obtenue pour $x_1^* = 3; x_2^* = 4$ et que le coût correspondant est $c^* \triangleq F(x_1^*, x_2^*) = 4 \times 3 + 8 \times 4 = 44$

1.2

$F(x_1, x_2) = cx_1 + 8x_2$

Pour un coût R, on a : $cx_1 + 8x_2 = R \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c}{8}x_1 + \frac{R}{8}$

- Droite D1 : $x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 3$
- Droite D2 : $x_2 = -x_1 + 7$

On constate que graphiquement, que la solution de (P) demeure $(x_1^*, x_2^*) = (3, 4)$ lorsque c satisfait la relation :

$-1 < -\frac{c}{8} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{8}{3} < c < 8$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{8}{3} \\ \beta = 8 \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Cas } c_1 = \alpha = -\frac{8}{3}}$

La droite des couts est parallèle à (D1). Le segment [BC] sur la figure est solution non unicité.

- $\boxed{\text{Cas } c = \beta = 8}$

La droite des coûts est parallèle à [CD]. Ce segment est la solution.

1.3 Forme standard

Inconnues x_1, x_2, e_1, e_2, e_3

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + e_1 = 9 \\ x_1 + x_2 + e_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 12 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

n=5 inconnues, m=3 contraintes

Algorithme du simplexe - Dictionnaires

Solution réalisable de base :

- $B = \{e_1, e_2, e_3\}$
- $HB = \{x_1, x_2\}$

$\left\{\begin{matrix} e_1 = 9 & e_2 = 7 & e_3 = 12 \\ x_1 = 0 & x_2 = 0 & \end{matrix}\right\}$

1.3.1 Etape 1

- Dictionnaire : expression des variables de base en fonction des hors base.

- $e_1 = 9 + x_1 - 3x_2$
- $e_2 = 7 - x_1 - x_2$
- $e_3 = 12 - 2x_1 - x_2$
- $F = 4x_1 + 8x_2$

- Variables entrantes :

$max\{4, 8\} = 8 \Rightarrow X_e = x_2$

- Variables sortantes

On maintient les varibles de base ≥ 0 avec $x_2 \nearrow$ et $x_1 = 0$

$$\begin{cases} 9 - 3x_2 \geq 0 \\ 7 - x_2 \geq 0 \\ 12 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_2 = min\{\frac{9}{3}, 7, 12\} = \frac{9}{3} = 3$

La variable sortante est $x_s = e_1$

- Etat courant (ou bilan)

- B: x_2, e_2, e_3
- HB : x_1, e_1
- $x_2 = 3; e_2 = 7 - 3 = 4; e_3 = 12 - 3 = 9$
- $x_1 = 0; e_1 = 0$
- $F = 8 \times 3 = 24$

1.3.2 Etape 2

- Dictionnaire : x_2 exprimé à partir de l'équation de la variable sortante

---

- $x_2 = 3 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}x_1$
- $e_2 = 4 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{4}{3}x_1$
- $e_3 = 9 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{7}{3}x_1$
- $F = 24 + \frac{20}{3}x_1 - \frac{8}{3}e_1$

- Variable entrante

$x_e = x_1$ (car $max(\frac{20}{3}; -\frac{8}{3}) = \frac{20}{3}$)

- Variable sortante :

On maintient $x_2, e_2, e_3 \geq 0$ avec $e_1 = 0$

$x_1 = min(-\frac{3}{1/3}; \frac{4}{4/3}; \frac{9}{7/3}) = \frac{4}{4/3} = 3$

e_2 sort : $x_s = e_2$

- Etat courant
- B : x_1, x_2, e_3
- HB : e_1, e_2
- $x_1 = 3; x_2 = 3 + \frac{1}{3}x_1 = 4; e_3 = 9 - \frac{7}{3} \times 3 = 2$
- $e_1 = 0; e_2 = 0$
- $F = 4x_1 + 8x_2 = 4 \times 3 + 8 \times 4 = 44$

1.3.3 Etape 3

Dictionnaire :

- $x_1 = 3 + \frac{1}{4}e_1 - \frac{3}{4}e_2$
- $x_2 = 4 - \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2$
- $e_3 = 2 - \frac{1}{4}e_1 + \frac{7}{4}e_2$
- $F = 44 - e_1 - 5e_2$

FIN

On obtient :

$x_1^* = 3; x_2^* = 4; F^* = 44$

Idem que la résolution graphique

2 Exercice 4

- B=x_1, x_3
- HB=e_1, x_2, e_3
- $x_1 = 10$
- $x_3 = 5$
- \$ $e_1 = x_2 = e_2 = 0$
- $F = 4 * 10 + 5$

$F = cx_1 + 2x_2 + x_3$

Le dictionnaire reste le même

$F = c(10 - \frac{4}{10}e_1 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{10}e_2) + 2x_2 + 5 - \frac{1}{10}e_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{3}{10}e_2$

$F = (10c + 5) + (-\frac{4c}{10} - \frac{1}{10})e_1 + (2 - \frac{3c}{5} - \frac{2}{5})x_2 + (-\frac{2c}{10} - \frac{3}{10})e_2$ (5)

On cherche les valeurs de c pour lesquelles, la solution optimale reste :

- $x_1 = 10; x_2 = 5$
- $e_1 = x_2 = e_2 = 0$

Le dictionnaire Final reste le même. Donc l'expression de F en fonction des variables HB doit rester (5).

C'est vrai sous les conditions :

$$\begin{cases} -\frac{4c}{10} - \frac{1}{10} \leq 0 \\ 2 - \frac{3c}{5} - \frac{2}{5} \leq 0 \\ -\frac{2c}{10} - \frac{3}{10} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq -\frac{1}{4} \\ c \geq \frac{8}{3} \\ c \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$$