TELECOM Nancy Apprentissage 2A — Mardi 21 octobre 2014

Graphes et Recherche Opérationnelle

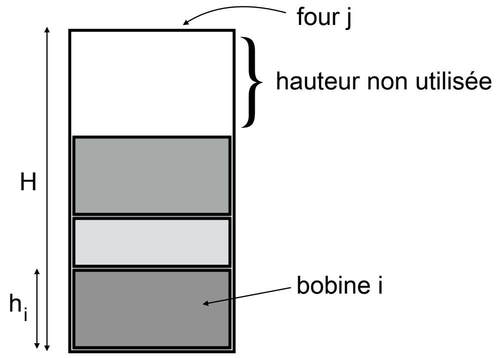
Examen partiel (1)

Durée : 1h30

Documents autorisés : feuille manuscrite A4 recto-verso contenant des éléments du cours et des TD.

Exercice 1. *Affectation de bobines dans des fours de recuit (4pts)*

Dans une usine de laminage, on empile des bobines de fil de fer les unes sur les autres et on recouvre avec des fours de recuit les piles ainsi constituées. On dispose de m fours tous identiques, d'hauteur H. Pour des raisons d'économie d'énergie, tous les m fours doivent être utilisés pendant une cuissson.



Il y a q bobines à combiner pour faire les m piles qui seront recouvertes par les m fours, q étant suffisamment grand pour qu'on laisse sûrement des bobines pour les cuissons suivantes. Chaque bobine i a une hauteur h_i.

L'énergie perdue dans les fours provient d'une cause principale : la hauteur de four non utilisée pendant la durée de la cuisson. On cherche donc à minimiser la somme totale des hauteurs non utilisées dans chacun des fours.

1. Modéliser ce problème en programmation linéaire sachant que :
   - tous les m fours doivent être utilisés.
   - une bobine est affectée au plus à un four lors d'une cuisson.
   - une pile de bobines ne peut dépasser la hauteur d'un four.

2. Ecrire le problème précédent sous la forme suivante :

$$\min_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right]$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \geq 0\,, \end{cases}$$

   en précisant les inconnues $\mathbf{x}$, la matrice A et les vecteurs $\mathbf{c}$ et $\mathbf{h}$. Précisez bien les dimensions des différentes matrices et vecteurs.

Exercice 2. *Solutions de base réalisables (3pts)*

Soit le PL suivant : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R} (7x_1 + 15x_2)$ avec $\mathcal{D}_R = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3x_2 \leq 5,\ 2x_1 \leq 7,\ \mathbf{x} \geq 0 \right\}$.

1. Mettre ce PL sous la forme standard : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4} \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ avec $A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, en précisant ce que valent la matrice A et les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$.

2. Déterminer toutes les solutions de base réalisables. Pour chacune d'elles, préciser quelles sont les variables de base $\mathbf{x}_B$, les variables hors-base $\mathbf{x}_H$, les vecteurs $\mathbf{c}_B$, $\mathbf{c}_H$ et les matrices A_B, A_H.

Exercice 3. *Simplexe (7pts)*

On considère le programme linéaire suivant :

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max\left(F(x_1,x_2) = 4x_1 + 8x_2\right) \\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Dessiner l'ensemble des solutions réalisables de (P) et résoudre *graphiquement* le problème (P).
2. Le coefficient de la variable x_1 dans l'expression de F vaut $c_1 = 4$. Déterminer graphiquement les bornes α et β avec $\alpha \le c_1 \le \beta$ pour lesquelles la solution de base réalisable obtenue précédemment est toujours optimale. Que se passe-t-il pour $c_1 = \alpha$ et pour $c_1 = \beta$?
3. Résoudre (P) en utilisant l'algorithme du simplexe avec la méthode des dictionnaires (convergence en 3 étapes).

Exercice 4. *Analyse de sensibilité (3pts)*

Soit le P.L. suivant :

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max\left[F = 4x_1 + 2x_2 + x_3\right] \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 20 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

On note e_1, e_2 et e_3 les variables d'écart associées à (P). On applique l'algorithme du simplexe et à la dernière étape, on obtient le dictionnaire ci-dessous :

$x_1 = 10 - 4/10\, e_1 - 3/5\, x_2 - 2/10\, e_2$
$x_3 = 5 - 1/10\, e_1 - 2/5\, x_2 - 3/10\, e_2$
$F = 45 - 17/10\, e_1 - 4/5\, x_2 - 11/10\, e_2$

1. Interpréter le dictionnaire obtenu. Déterminer la solution de base optimale $\mathbf{x}^*$. Préciser les variables de base et les variables hors-base.
2. On note $c_1 = 4$ le coefficient associé à x_1 dans la fonction objectif F. Déterminer toutes les valeurs possibles du coefficient c_1 pour lesquelles la solution $\mathbf{x}^*$ (obtenue avec $c_1 = 4$) reste optimale.

Exercice 5. *Initialisation du simplexe (3pts)*

Soit le problème de programmation linéaire (P) suivant : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R} \left(F(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3\right)$ avec

$$\mathcal{D}_R = \left\{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 9,\; x_1 + x_2 + x_3 \le 4,\; -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6,\; \mathbf{x} \ge 0\right\}.$$

Trouver une solution de base réalisable de (P) en introduisant une ou plusieurs variable(s) artificielle(s) associée(s) à un problème auxiliaire (phase 1 du simplexe). Donner le dictionnaire initial du simplexe en phase 2.