Correction Partiel - 2014

Arthur Garnier

1 Exercice 1

$$x_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si la bobine i se trouve dans le four j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Objectif :

Hauteur non utilisée dans un four : $H - \sum_{i=1}^{q} h_i x_{ij}$

$min \sum_{j=1}^{m} (H - \sum_{i=1}^{q} h_i x_{ij}) \Leftrightarrow min(-\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} h_i x_{ij}) \Leftrightarrow max \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} h_i x_{ij}$

Contraintes :

$\forall j = 1, ..., m; \sum_{i=1}^{q} x_{ij} \geq 1$ (Au moins une bobine par four)

$\forall i = 1, ..., q; \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1$ (Au plus un four par bobine)

$\forall j = 1, ..., m; \sum i = 1^q h_i x_{ij} \leq H$

$min_x F(x) = c^T x$

$$\begin{cases} Ax \leq h \\ x_k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Variable :

$x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m}, |x_{21}, x_{22}, ...x_{2,n}, |...x_{q1}, ...x_{qn})^T \in \mathbb{R}^{qm}$

$F(x) = -\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} h_i x_{ij} = -(h_1 x_{11} + h_1 x_{12} + ... + h_1 x_{1m} + h_2 x_{21} + ...)$

$c = -(h_1, ..., h_1 | h_2, ..., h_2 | ... | h_q, ..., h_q)^T \in \mathbb{R}^{qm}$

$\boxed{F(x) = c^T x}$

$(y = 1) x_{11} + x_{21} + ... + x_{q1} \geq 1$

$\vdots$

$(y = m) x_{1m} + x_{2m} + ... x_{qm} \geq 1$

2 Exercice 5

$maxF = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$

P:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + e_1 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + e_2 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - e_3 + a_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

PLA :

$$\begin{cases} minF_{aux} = a_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + e_1 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + e_2 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - e_3 + a_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

(P) admet une solution réalisable $\Leftrightarrow$ (PLA) admet une solution optimale $minF_{aux} = 0$ $i.e$ avec $a_3 = 0$

Pour (PLA) on a une solution de base réalisable évidente : $x_1 = x_2 = x_3 = e_3 = 0; e_1 = 9; e_2 = 4; a_3 = 6$

Etape 1 : On exprime les variable de base en fonction des variables hors base

---

- $e_1 = 9 - 6x_1 - 3x_2 - 2x_3$
- $e_2 = 4 - x_1 - x_2x_3$
- $a_3 = 6 + 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + e_3$
- $F_{aux} = 6 + 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + e_3$

Variable entrante : /!\ On cherche un min : On veut diminuer le F_{aux} : on choisit la variable qui a le coeff négatif le plus petit.

Donc $x_e = x_2$

Variable sortante : On maintient la positivité de e_1, e_2, a_3

$min(\frac{9}{3}, 4, \frac{6}{3}) = \frac{6}{3} = 2$

Donc $x_s = a_3 = 0$

$F_{aux} = 0 = minF_{aux} \Rightarrow$ le min pour F_{aux} est atteint et $minF_{aux} = 0$ avec $a_3 = 0$

Solution de base réalisable pour P :

- Variables de base : $x_2 = 2; e_1 = 9 - 3 \times 2 = 3; e_2 = 4 - 2 = 2$
- Variables hors-base : $x_1 = x_3 = e_3 = 0$