# Analyse Post-Optimale en Programmation Linéaire
# Analyse de sensibilité

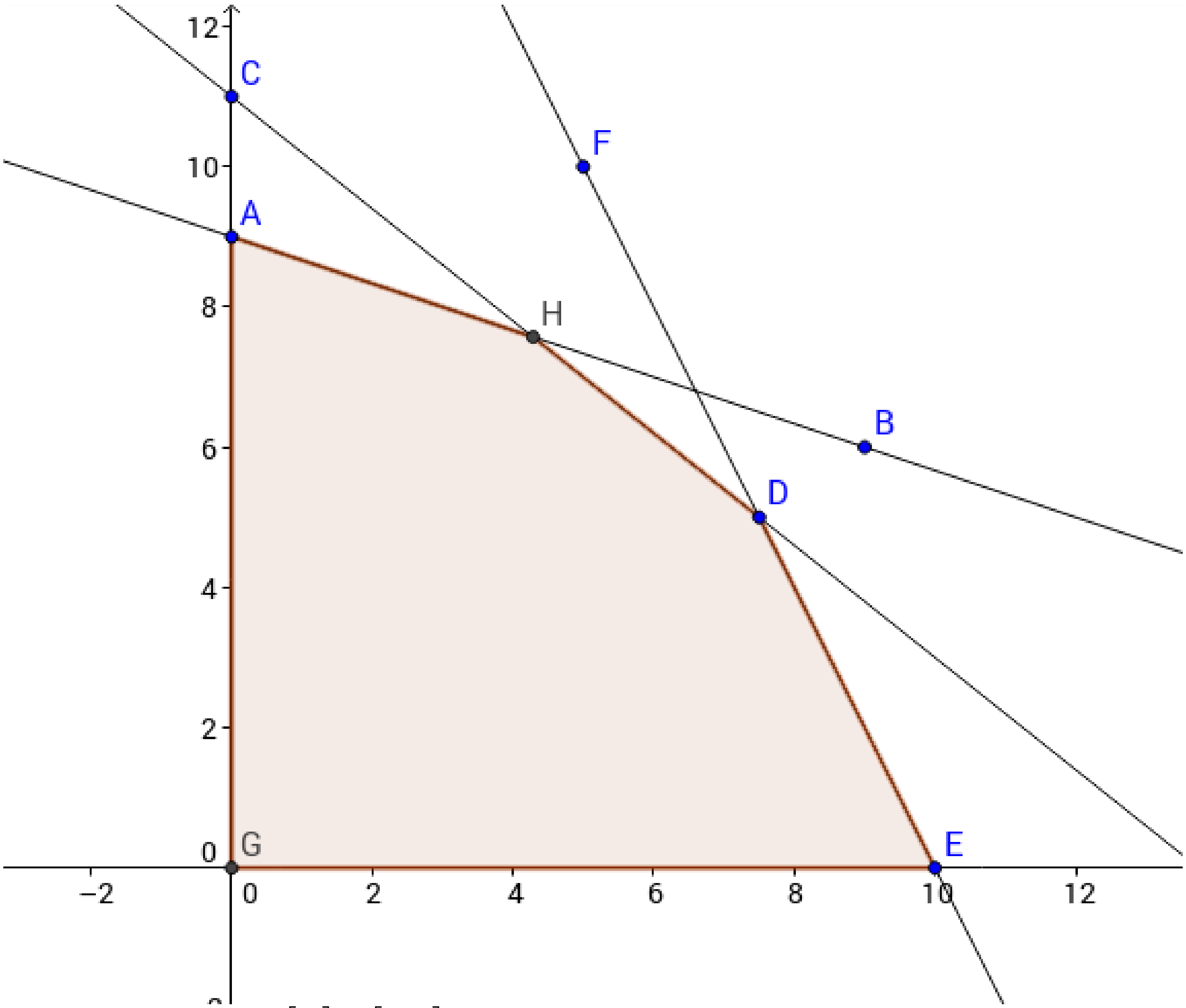
Arthur Garnier

## 1 Introduction

Problème de production (rappel)

$maxF(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$




Solution optimale : $x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Question : Comment se comporte la soution optimale si on modifie un des coefficients dans F ? Ou un des coefficients du second membre $b = \begin{bmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix}$. On regarde la sensibilité du coefficient devant $x_1$ dans $F(6)$

On remplace le cofficient 6 par un paramètre $c_1$. La droite a une équation de la forme :

$x_2 = \frac{c^k}{4} - \frac{c_1}{4}x_1 \to$ pente $\lambda_1 = \frac{-c_1}{4}$

$x_2 = 20 - 2x_1 \to$ pente $\lambda_2 = -2$

$x_2 = \frac{55}{5} - \frac{4}{5}x_1 \to$ pente $\lambda_3 = \frac{-4}{5}$

Si $\lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_3$ alors $x^*$ reste la solution optimale.

$\lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_3 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{-c1}{4} \leq \frac{-4}{5} \Leftrightarrow \frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8$

Objectif : On veut trouver un critère (algébrique) de sensibilité

## 2 Analyse post-optimale de la fonction objectif

On veut étudier la sensibilité des coefficient de F sur la solution optimale. On suppose qu'on a obtenu la solution optimale ($x^*$) d'un PL sous forme standard. Ie $Ax = b; x \geq 0$

A est une matrice de taille $m \times n$ (m contraintes; ,n inconnues).

$x \in \mathbb{R}^n; x \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0 ... x_n \geq 0$

On suppose qu'on a obtenu une base $b^*$ avec la décomposition.

$A = (A_{B^*}|A_{H^*})$ où $A_{B^*}$ est une matrice carrée $m \times m$ **inversible**. (Le système $A_{B^*}z = b$ admet une et une seule solution $z \in \mathbb{R}^m$)

$A_{H^*}$ matrice $m(n-m)$

Solution de base :

$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_H \end{bmatrix}$

- $x_B$ variable de base $\in \mathbb{R}^m$
- $x_H$ variable de base $\in \mathbb{R}^{n-m}$

Le système $Ax = b$ admet en général une infinité de solution ($n \geq m$).

Solution de base réalisable :

$x = \begin{bmatrix} x_{B^*} \\ x_{H^*} \end{bmatrix}; Ax = b; x \geq 0$

$Ax = b \Leftrightarrow (A_{B^*}|A_{H^*}) \begin{pmatrix} x_{B^*} \\ x_{H^*} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{B^*}x_{B^*} + A_{H^*}x_{H^*} = b \Leftrightarrow x_{B^*} = A_{B^*}^{-1}(b - A_{H^*}x_{H^*})$

Car $A_{B^*}$ est inversible et $x_{H^*} = 0$

On a $x_{B^*} = A_{B^*}^{-1}b - A_{B^*}^{-1}A_{H^*}x_{H^*}$

On note : $A_{B^*}^{-1}A_{H^*} = A_{H^*}^*$

La matrice $A_{H^*}^*$ est obtenue avec le dernier dictionnaire de la méthode du simplexe. Par exemple avec le problème de production :

Dictionnaire :

---

- $x_2 = 5 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3$
- $x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6}e_2 - \frac{5}{6}e_3$
- $e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_3$

- $F = \frac{27}{2} - \frac{1}{3}e_2 - \frac{7}{3}e_3$

---

$x_B^* = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ e_1 \end{bmatrix}; A_{B^*}^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{15}{2} \\ \frac{27}{2} \end{bmatrix}; x_{H^*} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}; A_{H^*}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{-5}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

Vecteur des coûts réduits :

$L_{H^*} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$

Proposition (condition d'optimalité) : La condition $L_{H^*} = c_{H^*}^T - c_{B^*}^T A_{H^*}^* \leq 0$ est une condition suffisante pour qu'une solution de base réalisable soit optimale.

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = (c_1, ..., c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c^T x$$

$c = \begin{pmatrix} c_{B^*} \\ c_{H^*} \end{pmatrix}$

Avec le problème de production :

$x_{B^*} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ e_1 \end{pmatrix}; c_{B^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; x_{H^*} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}; c_{H^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L_{H^*}^T = c_{H^*}^T - c_{B^*}^T A_{H^*}^* = (0,0) - (4,6,0) A_{H^*}^* = (-\frac{1}{3}; \frac{-7}{3})$

On utilise la condition d'optimalité $L_{H^*}^T \leq 0$ pour déterminer l'influence de c sur la solution optimale $x^*$

- On remplace un coefficient de c par un paramètre et on calcule la condition d'optimalité $L_{H^*}^T$ (avec toujours la même matrice $A_{H^*}^*$)
- On obtient une condition sur le paramètre. Cette condition est suffisante pour avoir la même solution optimale inchangée.

Exemple : On regarde l'influence du coefficient devant $x_1$ dans le problème de production. On remplace 6 par le paramètre $c_1$

$c_{B^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}; c_{H^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L_{H^*}^T = c_{H^*}^T - c_{B^*}^T A_{H^*}^* = -(\frac{4}{3} - \frac{c_1}{6}; \frac{-8}{3} + \frac{5c_1}{6})$

$$L_{H^*}^T \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{c_1}{6} \geq 0 \\ \frac{-8}{3} + \frac{5c_1}{6} \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \leq 8 \\ c_1 \geq \frac{16}{5} \end{cases}$$

Conclusion : Si $\frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8$ alors le problème de production admet comme solution optimale $x^* \begin{pmatrix} x_{B^*} \\ x_{H^*} \end{pmatrix}; x_B^* = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15/2 \\ 27/2 \end{pmatrix}; x_H^* = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solution optimale $x^*$ n'a pas changée mais F a changé. $F(x^*) = c_1 x_1^* + 4x_2^* = \frac{15}{2} c_1 + 20$