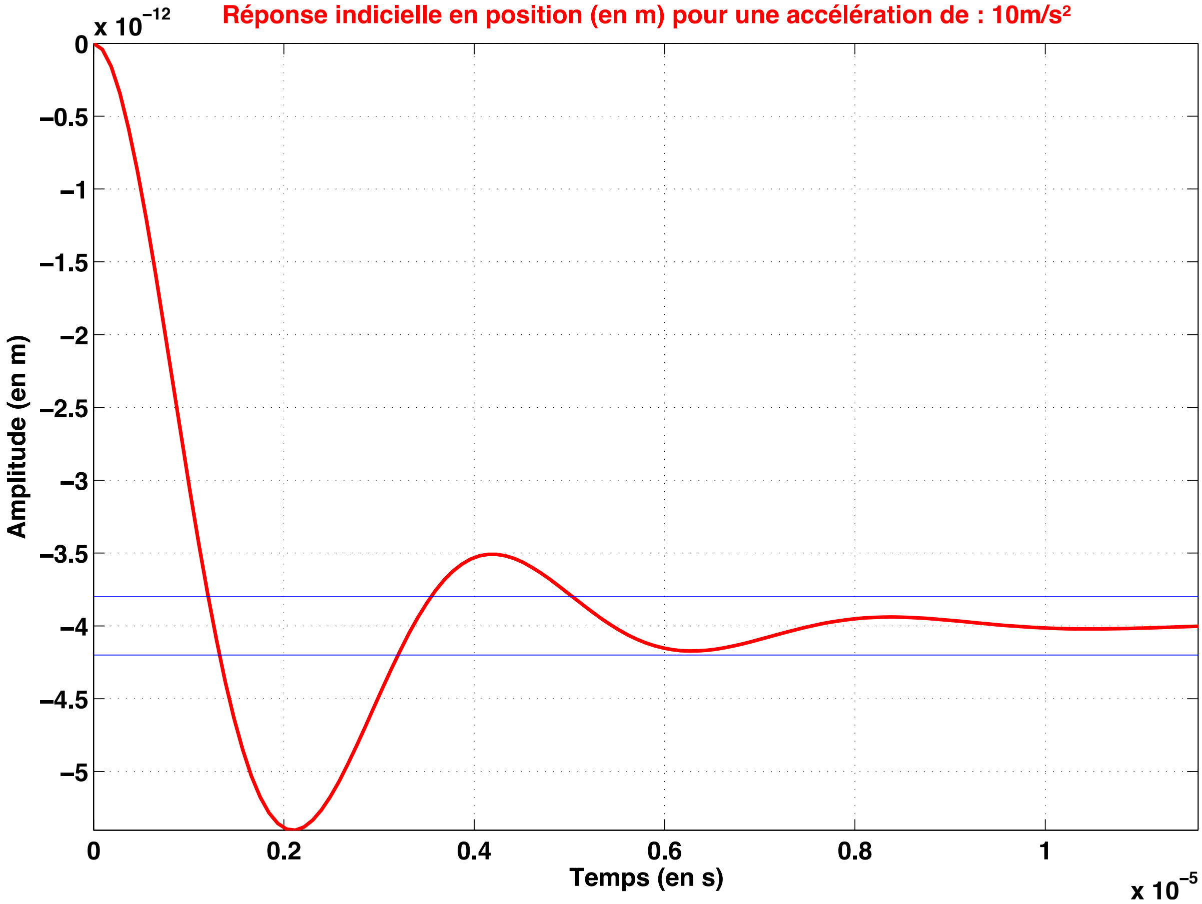
Corrigé succinct EXAMEN – Automatique n°1

Document autorisé : polycopié de cours Durée : 2h00
Lors de la correction la qualité de la présentation sera prise en compte P. SIBILLE

Exercice n°1 : calcul des caractéristiques d'un accéléromètre

Un accéléromètre est généralement modélisable par une fonction de transfert du second ordre. Ici, on désire déterminer les caractéristiques (gain statique, pulsation propre, coefficient d'amortissement) de l'accéléromètre dont la réponse est donnée ci-après. Il s'agit d'un accéléromètre monodimensionnel c'est à dire qu'il ne mesure cette grandeur que dans une seule direction. Pour ce faire, on dispose de la réponse à un échelon d'accélération d'amplitude $10 m/s^2$ donnée ci-après :



1. Commentez la figure, on expliquera notamment toutes les particularités de la réponse.

L'accéléromètre a un gain négatif : lorsque l'accélération est orientée dans un sens, la masselotte se déplace en direction opposée. Cette caractéristique est également visible dans la formule donnée à la question 6.

Réponse pseudo-oscillatoire : système possédant des racines complexes conjuguées.

2. En vous aidant du cours, donnez la forme de la fonction de transfert et donner la signification physique de chacun des paramètres.

La forme de la FT qui correspond à ce type de réponse est : $G(s)=\dfrac{K\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$

K : gain statique de la FT

ξ : coefficient d'amortissement

ω_0 : pulsation propre

3. Relevez, approximativement, la valeur numérique du gain statique de l'accéléromètre et donnez son unité.

$$K=\frac{\Delta X}{\Delta\Gamma}=-\frac{4.10^{-12}}{10}=-4.10^{-13}\qquad\left(\frac{m}{m/s^2}=s^{-2}\right)$$

4. Déterminez graphiquement la durée du régime transitoire. Expliquez à quoi correspond celui-ci.

Durée du régime transitoire : 5.10^{-6} s,

Non demandé : la bande passante utile $\omega_u=\dfrac{1}{5.10^{-6}}=2.10^5\,rad/s\Rightarrow f_u=\dfrac{\omega_u}{2\pi}\approx 30\,kHz$

5. En exploitant la réponse à un échelon d'amplitude 10m/s², déterminez les valeurs numériques de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement.

$$D_1(\%)=\frac{x\left(T_{D_1}\right)-x(\infty)}{x(\infty)}.100=\frac{-5.5+4}{-4}.100=37.5\%$$

$$D_1(\%)=100.e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\quad\Rightarrow\quad\xi=\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{Ln^2\left(\dfrac{D_1(\%)}{100}\right)}}}\quad\Rightarrow\quad\xi=\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{Ln^2\left(\dfrac{37.5}{100}\right)}}}\approx 0.3$$

$$T_{D_1}=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\quad\Rightarrow\quad\omega_0=\frac{\pi}{T_{D_1}\sqrt{1-\xi^2}}\quad\Rightarrow\quad\omega_0=\frac{\pi}{0.21e^{-5}\sqrt{1-(0.3)^2}}$$

$$\Rightarrow\quad\omega_0\approx 1.57e^{6}\ rad/s$$

6. Sachant que la masse de la masselotte est de 1µg et que la fonction de transfert de l'accéléromètre est de la forme : $G(s)=\dfrac{-M}{Ms^2+fs+k}$, en déduire les valeurs des paramètres physiques du capteur : raideur et coefficient de frottement visqueux.

$$G(s)=\frac{-M}{Ms^2+fs+k}=\frac{-1}{s^2+\dfrac{f}{M}s+\dfrac{k}{M}}$$

$$G(s)=\frac{-1}{s^2+\dfrac{f}{M}s+\dfrac{k}{M}}=\frac{K\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$$

On a donc les relations :

$$\left.\begin{aligned} K\omega_0^2 = -1 \quad &\Rightarrow \quad K = \frac{-1}{\omega_0^2} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{M}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad K = \frac{-M}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-M}{K}$$

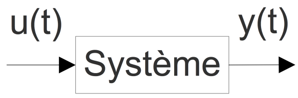
$$\xi = \frac{f}{2}\frac{1}{\sqrt{Mk}} \quad \Rightarrow \quad f = 2.\sqrt{Mk}.\xi$$

Application numérique :

$$k = \frac{-M}{K} = 2.5e^6 N \,/\, m$$
$$f = 2.\sqrt{Mk}.\xi \approx 0.95 N.s \,/\, m$$

Exercice n°2 : réponse d'un système

Soit le système suivant :



Ce système soumis à une sollicitation u(t) inconnue a une réponse y(t) dont l'expression est donnée dans le domaine de Laplace sous la forme :

$$Y(s) = \frac{y(0)s + 4y(0)}{s^2 + 4s + 3} + \frac{1}{s^2 + 4s + 3}.\frac{2}{s}$$

1. Pourquoi la sortie est-elle la somme de deux contributions ?

La sortie est la contribution du régime libre (conditions initiales : y(0)) et l'autre partie correspond au régime forcé (régime imposé par l'entrée).

2. A quelle sollicitation (entrée) ce système a-t-il été soumis ? Donnez l'expression temporelle de cette entrée. En déduire la fonction de transfert et l'ordre du système.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \quad et \quad U(s) = \frac{2}{s}$$

L'entrée est donc un échelon d'amplitude 2. La fonction de transfert G(s) est donc d'ordre 2.

3. Calculez les pôles de la fonction de transfert. En déduire les constantes de temps.

Racines du dénominateur : Une racine évidente s=-1, la seconde est donc s=-3. Ces valeurs qui annulent le dénominateur sont donc les pôles. Les constantes de temps sont donc : $T_1 = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \quad et \quad T_2 = -\frac{1}{-1} = 1$

4. Décomposez en éléments simples la réponse Y(s). Donnez l'expression de l'original temporel de Y(s). En déduire la valeur de y(t) lorsque t -> +∞

$$\frac{1}{2}\frac{-2 + 3y(0)}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{2 - 3y(0)}{s+3} + \frac{2}{3}\frac{1}{s}$$

$$\left(-1 + \frac{3}{2}y(0)\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y(0)\right)\mathrm{e}^{-3t} + \frac{2}{3}$$

5. Quelle est la valeur du gain statique de la fonction de transfert du système ?

$$G(0) = \frac{1}{3}$$

Exercice n°3 : système du second ordre

Un système du 2ème ordre (standard), initialement au repos, est soumis à un échelon d'amplitude unitaire, déterminez sa fonction de transfert sachant le taux de dépassement est de 25%, que le temps de premier dépassement vaut π et que la valeur finale vaut 5. Calculez la valeur de l'amplitude du signal de sortie au temps de premier dépassement.

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$D_1(\%) = 100.e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{Ln^2\left(\frac{D_1(\%)}{100}\right)}}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{Ln^2\left(\frac{25}{100}\right)}}} \approx 0.4$$

$$T_{D_1} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{\pi}{T_{D_1}\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \approx 1.1\, rad\,/\,s$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = K \quad \Rightarrow \quad \Delta y = K.\Delta u \quad \Rightarrow \quad 5 = K.1 \quad \Rightarrow \quad K = 5$$

La fonction de transfert s'écrit donc : $H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{5.97}{s^2 + 0.88s + 1.19}$

$$D_1(\%) = \frac{y\left(T_{D_1}\right) - y(\infty)}{y(\infty)}.100 \quad \Rightarrow \quad y\left(T_{D_1}\right) = \left(\frac{D_1(\%)}{100} + 1\right)y(\infty)$$

$$\Rightarrow \quad y\left(T_{D_1}\right) = 1.25y(\infty) = 6.25$$

Exercice n°4 : système du second ordre pseudopériodique

Un système du 2ème ordre pseudopériodique, de gain statique 1, est soumis à un échelon d'amplitude unitaire, déterminez sa fonction de transfert sachant que le module des pôles vaut 2 et que le temps de premier dépassement vaut $\pi/\sqrt{2}$. Calculez les pôles de cette fonction de transfert.

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Les pôles sont complexes conjugués (voir cours) :

$$\left(s+\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(s+\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)=0$$
$$\left(s-p_1\right)\left(s-p_2\right)=0$$
$$\Rightarrow p_1=\omega_0\left(-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad et \quad p_2=\omega_0\left(-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}\right)$$
$$\left|p_1\right|=\left|p_2\right|=\omega_0\left(\xi^2+1-\xi^2\right)=\omega_0 \quad et \quad \omega_0=2$$

$$T_{D_1}=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\xi^2}=\frac{\pi}{\omega_0.T_{D_1}}>0 \quad \Rightarrow \quad 1-\xi^2=\left(\frac{\pi}{\omega_0.T_{D_1}}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad \xi=\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{\omega_0.T_{D_1}}\right)^2} \Rightarrow \quad \xi=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}.\pi}{2.\pi}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(s)=\frac{K.\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}=\frac{1.(2)^2}{s^2+2\sqrt{2}s+2^2}=\frac{1.(2)^2}{s^2+2.8284s+2^2}$$

Les pôles sont donc : $$p_1=\omega_0\left(-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad et \quad p_2=\omega_0\left(-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}\right)$$
$$p_1=-\sqrt{2}+j\sqrt{2} \quad et \quad p_2=-\sqrt{2}-j\sqrt{2}$$