Transformée de Laplace

Arthur Garnier

February 4, 2015

1 Rappel

- $x(t)$ est un signal T périodique : Série de Fourier.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$
$w_0 = \frac{2\pi}{T}$

- $x(t)$ est non périodique

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$

- $x(k)$ signal discret

$$\text{TFtd} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTe) e^{-j2\pi fkTe}$$

- x(k) signal discret de durée N

$$\text{TFD} = X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi nk/N}$$
La TFD = TFtd pour $f = \frac{n}{N}$

- $x(t) \cdot e^{\sigma t}$ est à énergie finie

$TF[x(t)e^{-\sigma t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t - j\omega t} dt$
$X(S) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{e-St} dt$
$S = \sigma + j\omega$

2 Introduction

Soit un signal x(t), non absolument sommable, mais pour lequel il existe un réel α tel que le produit $x(t)e^{-\alpha t}$ soit absolument sommable. On peut définir la TF de ce produit. Soit alors un intervalle Σ tel que le réel $\sigma \in \Sigma$:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty$

On définit la TL X(s) de x(t) : s est une variable complexe = $\sigma + j\omega$

$\boxed{L[x(t)] = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St}dt}$ (TL bilatère)

On utilise aussi la TL monolatère (lorsque l'on se limite aux signaux causals, les deux transformées sont identiques) :

On dit que X(s) est l'image de x(t) et que x(t) est l'**original** de X(s).

$\boxed{L[x(t)] = X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$

Lorsdque le signal comporte une impulsion (ou une singularité d'ordre supérieur) en 0, il est nécessaire (cas monolatère) de faore une distinction supplémentaire :

$L_{+}[x(t)] = \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

$L_{-}[x(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = L_{+}[x(t)] + \int_{0^-}^{0^+} x(t)e^{-st}dt$

On vient de voir que $X(s) = X(\sigma + j\omega)$ est la TF de $x(t)e^{-\sigma t}$, appliquons la TF inverse :

$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

3 Propriétés de la TL

- Linéarité
  - $L[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s)$
- Convolution
  - $L[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s)$
- Dérivation
  - $L[x^{(n)}(t)] = s^nX(s)
- Intégration
  - Bilatère
    - $L[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau] = \frac{X(s)}{s}$
  - Monolatère
    - $L(+-)[\int_{0}^{t} x(\tau)d\tau] = \frac{X(s)}{s}$
- Th du retard :
  - $L[x(t-\tau)] = X(s)e^{-s\tau}$
- Th. de la somme
  - $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \lim\limits_{s\to 0} X(s) = \lim\limits_{\omega\to 0} X(\omega), (0 \in \Sigma)$
- Th de la valeur finale
  - $\lim\limits_{s\to 0} sX(s) = x(\infty)$ si la limite $\exists$