Transformée en Z

Arthur Garnier

February 4, 2015

1 Introduction

La transformée en z est une outil analogue, développé pour le traitement des signaux à temps discret, qui permet en particulier la résolution de l'équivalent discret des équations différentielles, les **équations aux différences**.

2 Définition

Soit un signal x(k) et un intervalle $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ tel que pour $\lambda \in \Lambda$, la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\lambda^{-n}$ converge. La Tz de x(k), fonction de la variable complexe z, est alors définie par :

- Tz bilatère :

$$\boxed{Z[x(k)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}; \lambda_1 \leq |z| \leq \lambda_2}$$

- Tz monolatère :

$$\boxed{Z[x(k)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}; |z| \geq \lambda_1}$$

La distinction entre les deux transformations n'esgt pas nécessaire si l'on se limite à l'analyse de signaux causals. En pratique, X(z) se présente généralement sous la forme de **fraction rationnelle en z**, dont les coefficients du développement $X(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} + ...$ bien sûr les valeurs numériques du signal $x(k) : a = x(0), b = x(1), c = x(2), etc$

Exemple :

$x(k) = a^{|k|}, a \in \mathbb{R}$

- TZ Bilatérale :

$x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|}z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k}z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} - 1 = -1 + \sum_{k=0}^{\infty}(az)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(az^{-1})^k = -1 + \frac{a-(az)^{\infty}}{1-az} + \frac{1-(az^{-1})^{\infty}}{1-az^{-1}}$

Si :

- $|az| \leq 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{|a|}$
- $|az^{-1} \leq 1 \Rightarrow |z| > |a|$

$|z| \in [|a|; \frac{1}{|a|}$

---

3 Exemples

- Impulsion : $x(k) = \delta(k-m) \rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)z^{-n} = z^{-m}; \Lambda =]0; +\infty[$
  - En particulier $x(k) = \delta(k) \rightarrow = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = z^0 = 1$
- Echelon : $x(k) = 1(k) \rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-n^{-1}}; \Lambda =]1, \infty[$

4 Propriétés

- Relations entre la Tz d'un signal discret et sa TF : $X(\omega) = X(z)_{z=e^{j\omega}}$
  - La TF est donc la Tz, calculée pour z appartenant au cercle unité.
- Linéarité : Z[ax(k) + by(k)=aX(z)+bY(z)$
- Convolution : $Z[x(k) * y(k)] = X(z)Y(z)$
- Translation :
  - $Z[x(k+m)] = z^m X(z)$
  - $Z[x(k-m)] = z^{-m} X(z)$
- Multiplication par a^k : $Z[a^k x_k] = X(a^{-1}z)$
- Différence : Z[x_k - x_{k-1} = X(a^{-1}z)$
- Somme (cas monolatère) : $Z[y_k = \sum_{n=0}^{k}] = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

5 Transformée en z inverse

A l'aide du théorème de Cauchy, on peut établir l'expression de la Tz inverse : $x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$

Le contour fermé C doit entourer l'origine du plan des z dans le sens positif et être dans la région de convergence.

Bien que cette intégrale se calcule en général facilement par la méthode des résidus, on l'utilise peu fréquemment. D'autres techniques permettent d'effectuer l'inversion, en particulier la décomposition en éléments simples. On passe à présent en revue certaines d'entre elles, mais en se limitant délibérément au cas de la Tz monolatère.

5.1 Développement par division

Lorsque X(z) se présente sous la forme d'une fraction rationnelle, ce qui est le cas le plus fréquent, on peut effectuer la division suivant les puissances croissantes de z^{-1}. Les coefficients de la série en z^{-1} obtenue sont les valeurs du signal x(k).

6 Equations aux différences

De même que la TL dans le cas des équations différentielles, la Tz permet de résoudre les équations aux différences linéaires à coefficients constants.