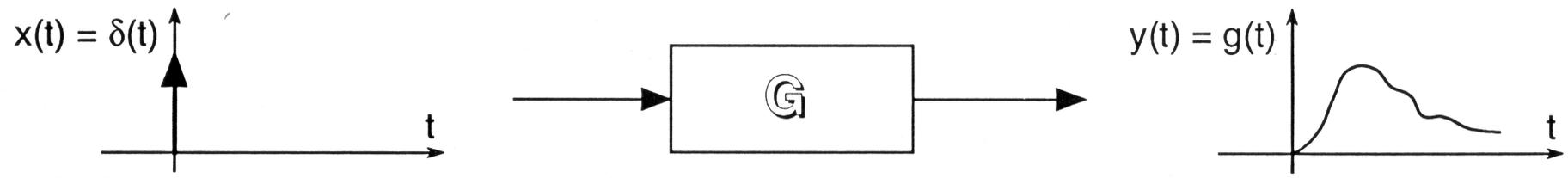


### REPONSE IMPULSIONNELLE ET CONVOLUTION :



La réponse impulsionnelle, c'est à dire la réponse à une impulsion de Dirac, d'un système invariant linéaire continu G initialement au repos, notée g(t), caractérise entièrement celui-ci. En effet, tout signal continu x(t) peut être décomposé en une "somme" pondérée d'impulsions décalées selon :

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Du fait de l'invariance du système, sa réponse à chaque impulsion décalée delta(t - tau) est :

$$G[\delta(t - \tau)] = g(t - \tau)$$

Compte tenu de sa linéarité, sa réponse à un signal quelconque x(t) est donnée par une "somme" pondérée de réponses impulsionnelles décalées :

$$y(t) = G[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = x(t) * g(t)$$

Si le système est causal, sa réponse impulsionnelle g(t) est un signal causal, et le terme g(t - tau) s'annule pour tau > t. De plus, si x(t) est causal, l'expression précédente s'écrit :

$$y(t) = G[x(t)] = \int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

La réponse impulsionnelle définie précédemment est une réponse idéalisée. Une réponse impulsionnelle expérimentale peut être obtenue en soumettant le système à une impulsion, de forme quelconque, contenant assez d'énergie, et de durée suffisamment brève par rapport à la plus petite des constantes de temps caractéristiques du système.

**Remarque :** G est BIBO stable si g(t) tend vers 0 quand t tend vers l'infini i.e si :  $\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau$  borné

La réponse fréquentielle ou harmonique d'un SIL est définie comme la TF  $G(\omega)$  de sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ . On peut l'interpréter en considérant la réponse du système au signal harmonique  $\exp(j\omega t)$ . En effet, en posant  $t - \tau = u$  dans le produit de convolution précédent, il vient :

$$G[e^{j\omega t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} g(t - \tau) d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u} g(u) du = e^{j\omega t} G(\omega)$$

Ainsi, la réponse du SIL au signal harmonique est un signal harmonique de même fréquence angulaire  $\omega$ , le coefficient de proportionnalité entre la sortie et l'entrée  $G(\omega)$  ne dépend que de  $\omega$ . Soient  $M(\omega)$  le module de  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  l'argument de  $G(\omega)$ . La réponse impulsionnelle  $g(t)$  étant réelle,  $G(-\omega) = G^*(\omega)$  et le module et l'argument sont des fonctions respectivement paire et impaire de  $\omega$  :

$$G(\omega) = |G(\omega)|e^{j\angle G(\omega)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \text{ avec } M(-\omega) = M(\omega) \text{ et } \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

En particulier, la réponse d'un SIL à un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega_0$  est un signal sinusoïdal de même pulsation  $\omega_0$ , déphasé de  $\varphi(\omega_0)$  et multiplié par  $M(\omega_0)$  :

$$G[\cos \omega_0 t] = M(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

Pour cette raison,  $M(\omega)$  est appelé **gain** du système et  $\varphi(\omega)$  **déphasage** du système.

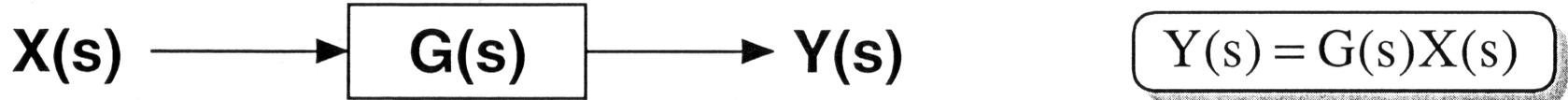
**NB** : les signaux harmoniques considérés sont des signaux permanents, par conséquent, les réponses correspondantes sont des réponses permanentes. Effectuer la **détermination expérimentale de la réponse fréquentielle d'un SIL** consiste à lui appliquer diverses sinusoïdes, de fréquences couvrant son domaine de fonctionnement, et à relever le gain et le déphasage correspondants. Mais ceci suppose que les propriétés précédentes soient vérifiées, c'est à dire qu'il faut attendre, avant chaque mesure, que le système soit en **régime permanent** ou **établi**

D'autre part, par TF du produit de convolution précédent, on a immédiatement, pour un signal d'entrée quelconque :

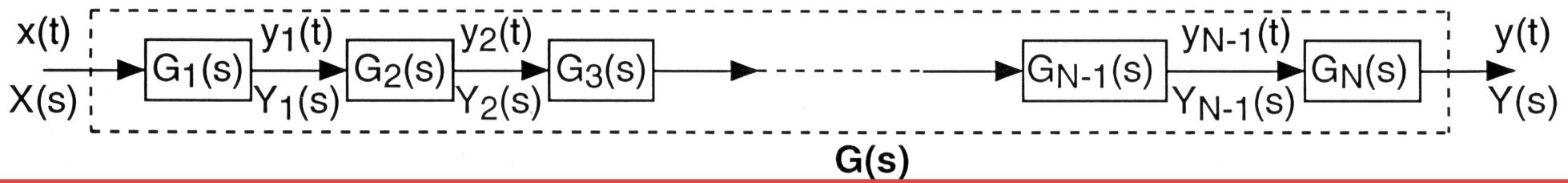
$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega)$$

On en déduit notamment que la **réponse fréquentielle d'une cascade** de SIL est égale au **produit des réponses fréquentielles** de chaque SIL

La fonction de transfert (FT) ou transmittance d'un SIL continu est définie comme la TL  $G(s)$  de sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ . La réponse  $y(t)$  du SIL à une entrée quelconque  $x(t)$  étant égale au produit de convolution entre  $x(t)$  et la réponse impulsionnelle  $g(t)$ , on a alors :



Par conséquent, la transformée de Laplace de la sortie d'un SIL continu est égale au produit de la transformée de Laplace du signal d'entrée par la fonction de transfert. Il en résulte, comme pour la réponse fréquentielle, que la transmittance d'un système formé par plusieurs SIL continus en cascade est égale au produit des transmittances de chaque SIL :



$$y(t) = y_{N-1}(t) * g_N(t) = y_{N-2}(t) * g_{N-1}(t) * g_N(t) = \dots = x(t) * g_1(t) * g_2(t) * \dots * g_N(t)$$

$$Y(s) = Y_{N-1}(s)G_N(s) = Y_{N-2}(s)G_{N-1}(s)G_N(s) = \dots = X(s) \underbrace{G_1(s)G_2(s)\dots G_N(s)}_{G(s)}$$

**Remarques :**

- Dans le cadre de l'étude des SIL causals, on utilise exclusivement la TL monolatère.
- La fonction de transfert (de même que la réponse fréquentielle) d'un SIL est propre à celui-ci et ne dépend pas de l'amplitude ou de la nature du signal d'entrée.
- La fonction de transfert inclut la correspondance d'unité entre l'entrée et la sortie, mais ne donne aucune information sur la structure physique du système (des systèmes physiquement très différents peuvent avoir une transmittance identique).

## Remarques :

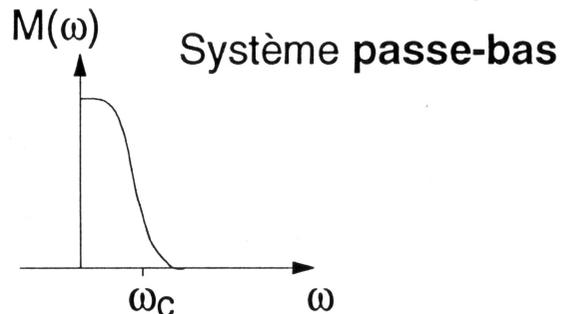
- Si la FT d'un système est connue, la compréhension de son fonctionnement peut être abordée à travers l'étude de sa réponse à diverses entrées.
- La **détermination expérimentale de la FT** d'un SIL, c'est à dire l'**identification** du système peut s'effectuer bien sûr à partir de sa réponse impulsionnelle expérimentale, mais aussi en analysant sa réponse à des signaux d'entrée connus.
- La réponse impulsionnelle d'un SIL BIBO stable étant un signal absolument sommable, sa transformée de Fourier se déduit directement de sa transformée de Laplace en posant  $s = j\omega$ .

En conséquence, la réponse fréquentielle d'un SIL stable s'obtient en posant  $s = j\omega$  dans la fonction de transfert :

$$G(\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

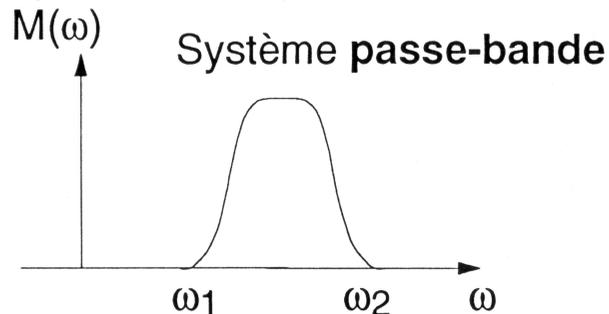
Finalement, il apparaît que le comportement dynamique d'un système continu monovariante invariant linéaire  $G$  est **entièrement caractérisé, et de manière équivalente**, soit par sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ , soit par sa réponse fréquentielle  $G(\omega)$ , ou enfin par sa fonction de transfert  $G(s)$ .

De manière similaire à ce qui avait été fait pour les signaux, on peut distinguer différents types de SIL suivant la forme de leur réponse fréquentielle, ou plus précisément de leur gain fréquentiel :

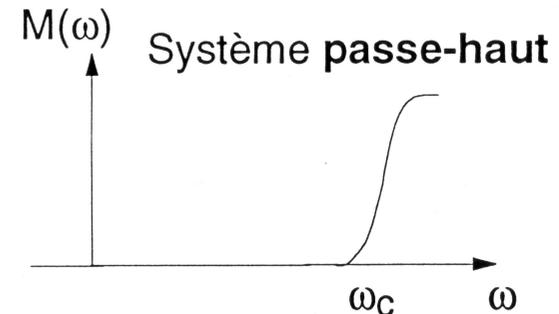


Un tel système, caractérisé par sa **pulsation de coupure**  $\omega_c$ , filtre les hautes fréquences.

Il existe aussi des systèmes **coupe-bande**, par ailleurs, on peut distinguer les systèmes à **large bande** des systèmes à **bande étroite**.



La **largeur de bande** ou **bande passante** de ce système est donnée par  $\omega_2 - \omega_1$ .



Une part importante des systèmes physiques monovariabiles, en particulier mécaniques ou électriques, sont modélisés mathématiquement par une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants, dont l'ordre dépend de la complexité du système considéré :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_r \frac{d^r x}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} x}{dt^{r-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

soit  $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^r b_i \frac{d^i x}{dt^i}$  (système d'ordre n) En général,  $r \leq$  (voire  $<$ )  $n$  pour les systèmes physiques (inertie).

Ces systèmes ne sont pas linéaires au sens où on l'a défini jusqu'à présent. En effet, la solution d'une telle équation différentielle va inclure des termes dépendant des conditions initiales qui détruisent la linéarité. **Exemple** : soit le système régi par l'équation différentielle du 1er ordre  $\dot{y} + ay = x$

On montre que la solution générale s'écrit :

$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{\substack{\text{constante arbitraire,} \\ \text{indépendante de } x(t)}} e^{-a(t-t_0)} + \underbrace{\int_{t_0}^t x(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau}_{\text{convolution}}$$

Ainsi, la linéarité est assurée si **toutes les conditions initiales** (ou **auxiliaires**) sont **supposées nulles**. L'effet, **additif**, des conditions auxiliaires peut être traité de façon indépendante, c'est pourquoi ces systèmes sont parfois qualifiés de systèmes incrémentalement ou additivement linéaires. Par ailleurs, on peut montrer que pour garantir la causalité du système, celui-ci doit être supposé **initialement au repos**, c'est à dire que,  $x(t)$  étant l'entrée appliquée au système à l'instant  $t_0$ , et donc  $x(t) = 0$  pour  $t \leq t_0$ ,  $y(t)$  doit être nul également pour  $t \leq t_0$ .

Avec les hypothèses précédentes, il est facile d'établir la FT du système à partir de l'**image par transformée de Laplace** (monolatère) de l'**équation différentielle**. En pratique, les signaux d'entrée étant bornés et les systèmes stables, les sorties sont bornées et l'abscisse de convergence de la TL  $\sigma$  est égale à 0. Le plus simple est de raisonner sur un exemple :

$$a_3\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_1y(t) = b_0x(t) \xrightarrow{\text{TLaplace}}$$

$$a_3[s^3Y(s) - s^2y(0^-) - s\dot{y}(0^-) - \ddot{y}(0^-)] + a_2[s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)] + a_1[sY(s) - y(0^-)] + a_0Y(s) = b_0X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}}_{\text{fonction de transfert}} X(s) + \frac{(a_3s^2 + a_2s + a_1)y(0^-) + (a_3s + a_2)\dot{y}(0^-) + a_3\ddot{y}(0^-)}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

**Commentaires :** Le premier terme du membre de droite représente ici la **réponse forcée** du système, c'est à dire la solution de l'équation avec second membre. Le deuxième terme, tributaire des conditions initiales, représente la **réponse libre** du système, soit la solution de l'équation sans second membre. Si l'équation de départ fait intervenir des dérivées de l'entrée, les termes correspondants font partie de la réponse forcée.

On constate que la fonction de transfert se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en s. Le dénominateur de la FT n'est autre que l'**équation caractéristique** du système, par conséquent, **les racines de l'équation caractéristique sont les pôles de la FT**. Lorsque des dérivées de l'entrée interviennent, la FT comporte également des **zéros**. La FT est donc caractérisée par la position de ses pôles et de ses zéros dans le plan en s.

Si le système présente un **retard pur**  $T$ , la FT est le produit d'une fraction rationnelle par  $\exp(-sT)$ .

La réponse libre est définie comme la réponse à des conditions initiales définies, le signal d'entrée étant nul, c'est donc la solution de l'équation différentielle sans second membre. Si les  $n$  racines, notées  $s_i$ , de l'équation caractéristique  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$  sont distinctes, l'équation différentielle possède  $n$  solutions linéairement indépendantes :  $y_1 = \exp(s_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(s_2 t)$ , ... ,  $y_n = \exp(s_n t)$  appelées **modes du système**. La solution complète est une **combinaison linéaire des modes** :

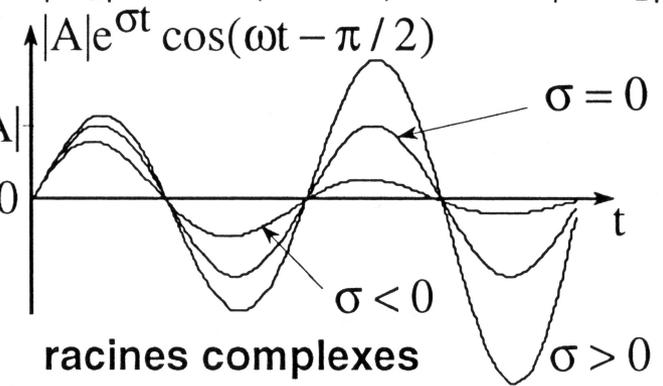
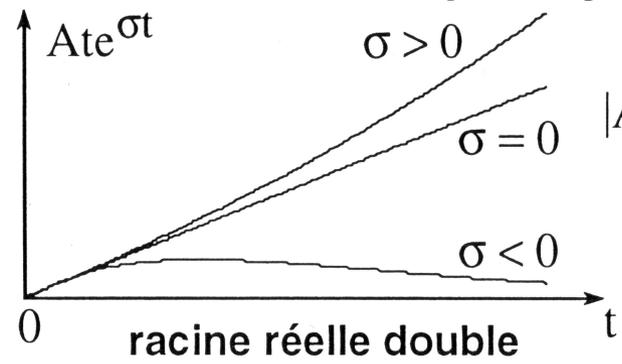
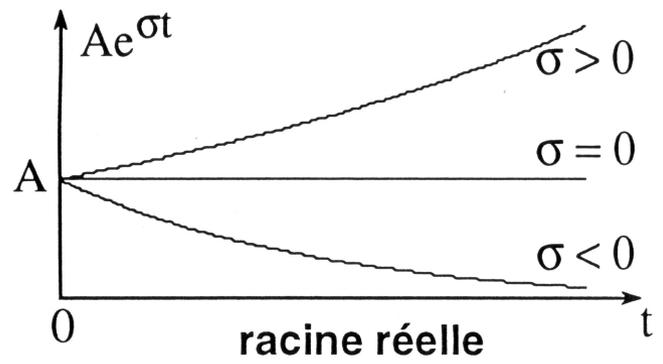
$$y_L(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}$$

Les coefficients  $A_i$  dépendent des conditions initiales. A chaque racine multiple  $s_k$ , de multiplicité  $n_k$  correspondent  $n_k$  modes :  $e^{s_k t}, t e^{s_k t}, t^2 e^{s_k t}, \dots, t^{n_k-1} e^{s_k t}$

Finalement, la réponse libre est une somme de signaux de la forme :  $A_i e^{s_i t}$  ou  $A_i t^m e^{s_i t}$

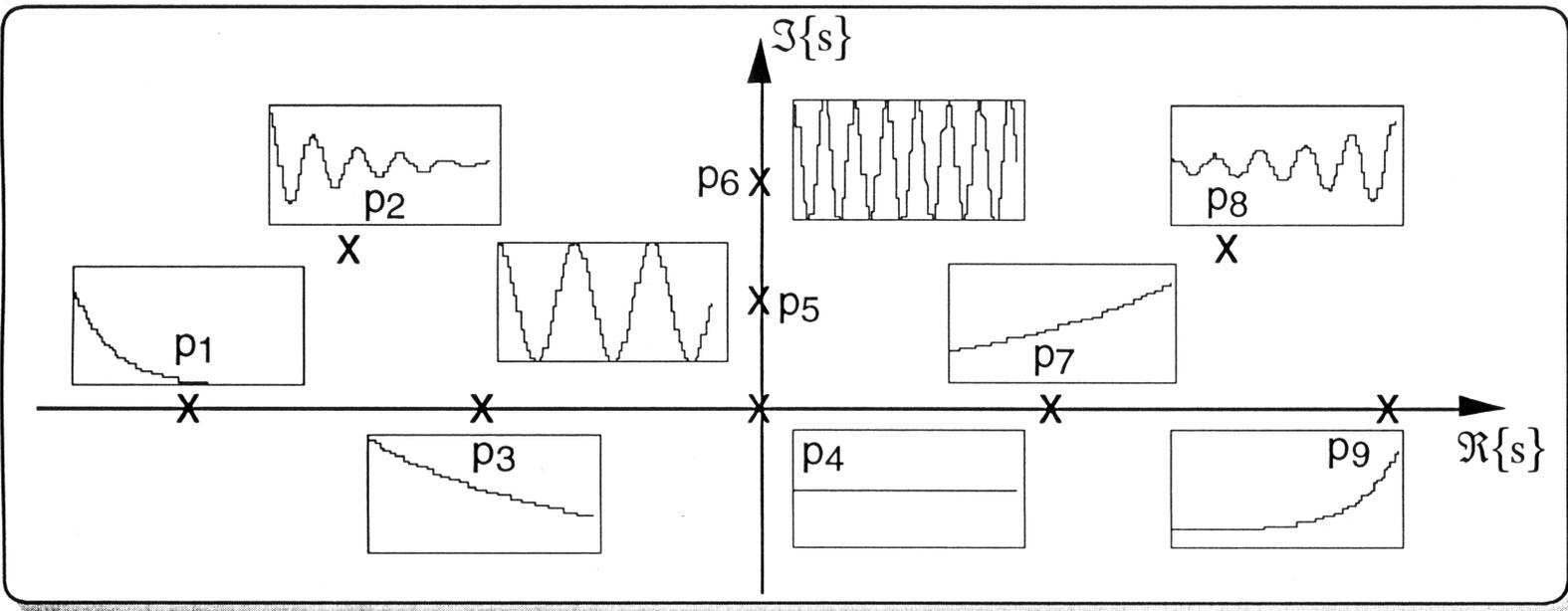
Pour des systèmes physiques, les coefficients de l'équation caractéristique sont réels, par conséquent, les racines  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$  sont réelles  $s_i = \sigma_i$ , ou bien complexes, mais apparaissent alors par paires de conjugués  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$  et  $s_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ . De plus, dans ce dernier cas, les modes correspondants sont **oscillatoires**. Si on suppose la présence d'une paire de racines complexes  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ , la réponse étant réelle, les coefficients correspondants  $A_1$  et  $A_2$  sont forcément complexes conjugués, et le mode

résultant est finalement de la forme :  $A_1 e^{s_1 t} + A_1^* e^{s_1^* t} = 2\Re\{A_1 e^{s_1 t}\} = 2|A_1| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$  où  $\varphi = |\angle A_1|$



Dans le cas, plus rare, de racines complexes multiples, on observe des modes oscillatoires croissants dès que  $\sigma_i \geq 0$ . Finalement, tous les modes tendent vers zéro si :  $\sigma_i = \Re\{s_i\} < 0$

Les racines de l'équation caractéristique n'étant autres que les pôles de la fonction de transfert, on peut représenter les différents modes possibles d'un système en fonction de la position de ces pôles dans le plan complexe de Laplace :



Les constantes de temps du système sont données par :

$$T_i = \left| \frac{1}{\sigma_i} \right|$$

( $\sigma_i \neq 0$ )

Ainsi qu'on l'a dit précédemment, tous les modes tendent vers zéro si tous les pôles de la FT sont à partie réelle négative. Or, on a vu auparavant, qu'un système est dans un état d'équilibre stable si, écarté de cet état, il tend à y revenir, éventuellement en oscillant. Donc, en particulier, la sortie d'un système stable à entrée nulle, c'est à dire en régime libre, doit tendre vers zéro et ce, quelque soient les conditions initiales. En définitive, on peut énoncer la condition de stabilité d'un SIL :

**Un SIL n'est stable que si la partie réelle des pôles de sa fonction de transfert (ou des racines de son équation caractéristique) est négative, c'est à dire si les pôles sont tous situés dans le demi plan complexe gauche.**

Un système avec un pôle simple ou multiple en 0, ou une paire de pôles simples sur l'axe imaginaire, est à la **limite de stabilité**. **Remarque** : si la sortie d'un SIL instable croît indéfiniment en théorie, dans la réalité, elle atteint une valeur limite, ou un régime oscillant limite.

Un système est en **régime forcé** lorsqu'il est soumis, à partir de son état d'équilibre, à un signal d'entrée, ce dernier étant appliqué à l'instant  $t_0$  tel que :

$$y(t_0) = \dot{y}(t_0) = \dots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$$

La **réponse forcée** n'est pas tributaire des conditions initiales et dépend uniquement du signal d'entrée, c'est la **solution de l'équation différentielle avec second membre**. On montre qu'elle s'écrit de manière générale comme le produit de convolution entre la **fonction force**  $e(t)$  et la réponse libre  $\gamma(t)$

obtenue pour les conditions initiales :

$$y(t_0) = \dot{y}(t_0) = \dots = y^{(n-2)}(t_0) = 0 \text{ et } y^{(n-1)}(t_0) = \frac{1}{a_n}$$

$$y_F(t) = \int_{t_0}^t \gamma(t - \tau) e(\tau) d\tau \text{ où } e(t) = \sum_{i=0}^r b_i x^{(i)}(t) \text{ et } \gamma(t) / g(t) = \sum_{i=0}^r b_i \gamma^{(i)}(t)$$

La **réponse totale** est la somme de la réponse libre et de la réponse forcée :  $y(t) = y_L(t) + y_F(t)$

La **réponse permanente** (ou régime permanent) est la partie de la réponse totale qui subsiste quand  $t$  tend vers l'infini (physiquement, cela correspond à un temps d'au moins 5 à 10 fois la plus grande des constantes de temps du système). Le théorème de la valeur finale est utile pour caractériser le régime permanent. Au contraire, la **réponse transitoire** (ou régime transitoire) est la partie de la réponse totale qui disparaît quand  $t$  tend vers l'infini.

La **réponse indicielle** d'un système est sa réponse à un échelon unitaire. Celle-ci est très souvent utilisée en pratique pour caractériser un système. C'est en effet un excellent signal d'épreuve comportant à la fois des hautes (changement brusque) et des basses (valeur constante) fréquences. On utilise également la réponse à la rampe.

Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, il n'est pas facile de calculer les racines de l'équation caractéristique. Le critère de Routh - Hurwitz (1874-1895) permet de déterminer le nombre de racines d'un polynôme situées dans le demi plan droit sans exiger la factorisation du polynôme. La procédure à suivre est la suivante :

1. Ecrire l'équation caractéristique sous la forme :  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

On suppose que  $a_0 \neq 0$ , c'est à dire qu'on s'est débarrassé d'éventuelles racines nulles.

2. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que toutes les racines soient à partie réelle négative est la suivante : **tous les coefficients  $a_i$  doivent exister (être  $\neq 0$ ) et être de même signe** (en général positif). Si cette condition n'est pas vérifiée et si l'on ne s'intéresse qu'à la stabilité absolue du système, on peut conclure que celui-ci est instable et la procédure est terminée.

3. Former le tableau de Routh suivant :

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$	$a_0$ (n pair)	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$	$a_0$ (n impair)	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$	0		
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	0	0	$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$\dots$	0	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^1$	$e_1$	0	0	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^0$	$f_1$	0	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	0	$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \dots$

Le processus décrit précédemment est poursuivi jusqu'à obtention de  $n + 1$  lignes. Afin de simplifier les calculs, il est possible de multiplier une ligne par une constante positive avant de calculer la suivante. Le critère de Routh peut alors s'appliquer :

**La partie réelle des racines de l'équation caractéristique est négative, et donc, le système est stable, si les  $n + 1$  termes de la 1ère colonne du tableau de Routh ont le même signe (en général positif). Le nombre de racines (comptées avec leur multiplicité) à partie réelle positive (racines "instables") est égal au nombre de changements de signe dans cette colonne.**

**Exemple :**

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2	4	0
simplification par 2	1	2	0
$s^2$	1	5	0
$s^1$	-3		
$s^0$	5		

Instable, 2 changements de signe, donc 2 racines à partie réelle positive.

**Cas particulier :** si l'un des termes de la 1ère colonne est nul, les autres termes de la même ligne étant non-nuls, on remplace le terme nul par un nombre positif  $\epsilon$  très petit pour finir le tableau. Si le signe du coefficient situé au dessus du  $\epsilon$  est le même que celui du coefficient du dessous, cela indique la présence d'une paire de racines imaginaires, si ces signes sont opposés, cela compte comme un changement de signe. Remarque : on peut aussi refaire le tableau en remplaçant  $s$  par  $s^{-1}$  dans le polynôme, ce qui généralement supprime le terme nul.

**Exemples :**  $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

Présence d'une paire de racines imaginaires, ici,  $\pm j$ .

$s^3$	1	1	
$s^2$	2	2	
$s^1$	$0 \approx \epsilon$		
$s^0$	2		

$s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2) = 0$

$s^3$	1	-3	
$s^2$	$0 \approx \epsilon$	2	
$s^1$	$-3 - 2/\epsilon$		
$s^0$	2		

2 changements de signe, ici, une racine "instable" double = 1.

**Autre cas particulier :** une ligne entière de zéros indique la présence de paires de racines réelles de même module mais de signe opposé et / ou de paires de racines imaginaires conjuguées. Dans ce cas, le tableau peut être achevé en formant un **polynôme auxiliaire** avec les coefficients de la dernière ligne non-nulle, et en utilisant les coefficients du polynôme obtenu par dérivation du polynôme auxiliaire pour la ligne suivante. Les paires de racines peuvent être obtenues par factorisation du polynôme auxiliaire qui est toujours pair. Si son degré est  $2m$ , il y aura donc  $m$  paires de racines.

**Exemple :**

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0 \quad \begin{array}{l|l|l} s^5 & 1 & 24 \quad -25 \\ s^4 & 2 & 48 \quad -50 \\ s^3 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$s^5$	1	24	-25	
$s^4$	2	48	-50	
$s^3$	8	96		←
$s^2$	24	-50		←
$s^1$	112,7	0		←
$s^0$	-50			←

$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$

un changement de signe, donc une racine à partie réelle positive dans le polynôme de départ  $D(s)$ .

La résolution de l'équation  $P(s) = 0$  conduit aux solutions  $s^2 = 1$  et  $s^2 = -25$ , d'où finalement :

$$D(s) = (s+1)(s-1)(s+5j)(s-5j)(s+2)$$

**Stabilité relative :** pour avoir une idée de la marge de stabilité, on peut faire le changement  $s = s' - \sigma$ ,  $\sigma$  constante quelconque, dans l'équation caractéristique, avant construction du tableau. Le critère révèle alors le nombre de racines situées à droite de la droite verticale  $s = -\sigma$ .

**Remarque :** en automatique, on est souvent confronté à des équations caractéristiques comportant un ou plusieurs paramètres. Le critère de Routh permet alors d'établir des conditions sur ceux-ci.

Le **gain statique** d'un SIL est le gain, i.e le module de la réponse fréquentielle, à la fréquence 0. Physiquement, c'est le rapport entre l'amplitude de la sortie et de l'entrée en régime permanent :

$$\frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(s)}{X(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{b_0}{a_0} = K_s$$

Lorsque le paramètre  $a_0$  est nul, i.e  $s$  est en facteur au dénominateur de la FT, on dit que le système comporte une **intégration**.

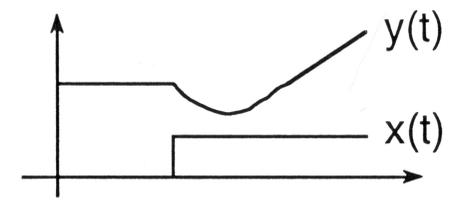
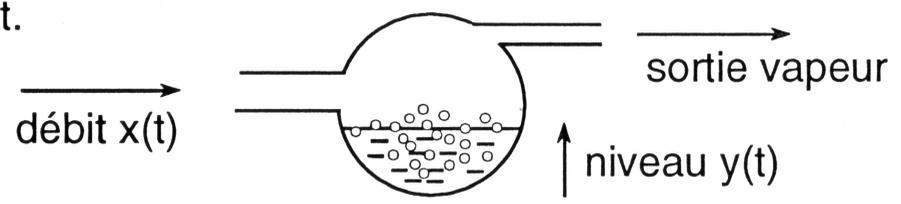
Le gain statique étant dans ce cas infini, on définit le **gain en vitesse** :

$$K_v = \frac{b_0}{a_1}$$

**Systèmes à déphasage non-minimal** : ce sont les systèmes dont le déphasage est non-nul en basse fréquence. La commande automatique de ces systèmes est souvent délicate. On distingue deux cas : les **systèmes à retard pur** et les **systèmes comportant des zéros à partie réelle positive**.

**Systèmes à retard pur** : les retards purs physiques sont liés à des phénomènes de transfert (retard dû au temps de propagation d'une onde, au temps de déplacement d'une pièce, de transport de produit, etc.). On peut aussi se servir d'un retard pur pour modéliser des constantes de temps dont la valeur est faible par rapport à la constante de temps principale d'un système. La fonction de transfert d'un retard pur  $T$  est égale à  $\exp(-sT)$  (gain constant = 1 et déphasage =  $-\omega T$ ).

**Systèmes à zéros "instables"** : ces systèmes sont lents car ils sont caractérisés par des réponses indicielles à départ inverse. Exemple : générateur de vapeur. L'arrivée d'eau froide crée une baisse de température qui entraîne, dans un premier temps, une baisse du volume de bulles donc du niveau apparent.



**Remarque** : On peut généraliser la notion de FT aux systèmes multivariables. On est alors confronté à un système d'équations différentielles, pour lequel on peut mettre en évidence une **matrice de transfert**, constituée de FT élémentaires, chacune représentant l'influence d'une entrée sur une sortie, les autres entrées étant nulles. En automatique moderne, on fait plutôt appel à la **représentation d'état**, qui permet de grandement simplifier et améliorer l'analyse des systèmes multivariables.

Il existe plusieurs façons de représenter la réponse fréquentielle d'un système : **diagramme de Black**, **diagramme de Bode**, **diagramme de Nyquist**. Ces différents modes de représentation utilisent soit le module et l'argument de la réponse fréquentielle, soit les parties réelles et imaginaires.

On rappelle ici quelques règles élémentaires concernant les complexes, utiles dans de nombreux cas :

$$\text{Soit } G(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_q(j\omega)}{G'_1(j\omega)G'_2(j\omega)\cdots G'_p(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdots |G_q(j\omega)|}{|G'_1(j\omega)| \cdot |G'_2(j\omega)| \cdots |G'_p(j\omega)|}$$

$$\text{et } \angle G(j\omega) = \sum_{i=1}^q \angle G_i(j\omega) - \sum_{i=1}^p \angle G'_i(j\omega)$$

En particulier :  $\left| \frac{a+jb}{c+jd} \right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$  et  $\angle \left\{ \frac{a+jb}{c+jd} \right\} = \angle \{a+jb\} - \angle \{c+jd\} = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \text{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$

## Diagramme de Black :

Dans ce type de diagramme, on représente le **gain**, c'est à dire le module de la réponse fréquentielle  $M(\omega)$ , exprimé en décibels, **en fonction du déphasage**, c'est à dire l'argument de la réponse fréquentielle  $\varphi(\omega)$ , exprimé en degrés. La courbe obtenue, appelée **lieu de Black**, est graduée en  $\omega$ . Cette représentation est particulièrement adaptée à certaines méthodes de synthèse de correcteur, utilisées en automatique.

### Diagramme de Bode :

Le diagramme de Bode est constitué de **deux graphes distincts**, représentant respectivement l'évolution du gain du système  $M(\omega)$  en **décibels** et du **déphasage**  $\varphi(\omega)$  en degrés, en fonction de la **pulsation**  $\omega$ . Les échelles utilisées sont logarithmiques, sauf pour la phase :

- en abscisse, on utilise  $\log(\omega/\omega_0)$ , où  $\omega_0$  est une valeur de référence quelconque, ou bien on utilise  $\omega/\omega_0$  mais avec une échelle logarithmique, ce qui permet, dans les deux cas de faire une exploration étendue de la réponse fréquentielle.
- en ordonnée,  $M(\omega)_{dB} = 20 \log M(\omega)$ . Avec cette graduation, l'échelle redevient linéaire. L'échelle utilisée pour la phase est linéaire.

L'intérêt du diagramme de Bode réside dans le fait que le Bode d'un système constitué d'une cascade de sous-systèmes, est égal à la somme graphique des Bode des sous-systèmes, en effet :

$$\text{Si } G(\omega) = G_1(\omega)G_2(\omega), |G_1(\omega)G_2(\omega)| = |G_1(\omega)| \cdot |G_2(\omega)| \rightarrow |G_1(\omega)G_2(\omega)|_{dB} = |G_1(\omega)|_{dB} + |G_2(\omega)|_{dB}$$

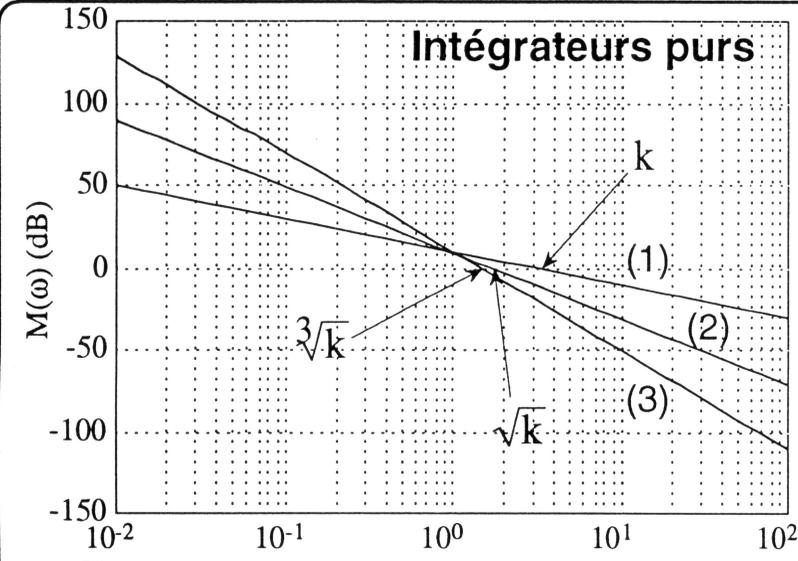
$$\text{De plus, } \angle\{G_1(\omega)G_2(\omega)\} = \angle\{G_1(\omega)\} + \angle\{G_2(\omega)\}$$

Le diagramme de Bode peut être tracé manuellement, soit à partir d'un relevé expérimental de la réponse fréquentielle, soit à partir de la connaissance de la FT. Dans ce dernier cas, pour des systèmes complexes, un tracé précis peut être obtenu à l'aide d'outils logiciels dits de **CAO de l'automatique**. Sans l'aide de l'informatique, il est toujours possible de tracer un **diagramme asymptotique**.

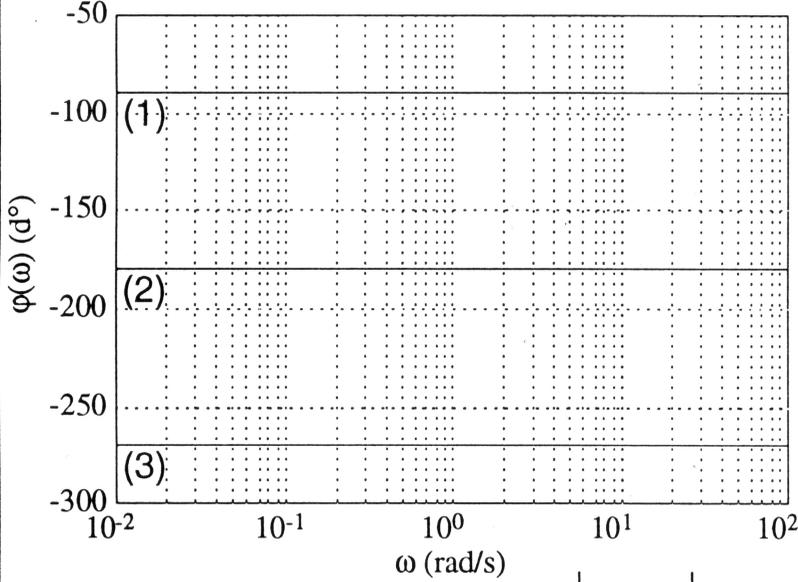
Pour tracer un Bode à partir de la FT, on décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre et d'éventuelles intégrations (ou dérivations) :

$$G(s) = \frac{(s+z_1) \cdot \dots \cdot (s+z_q) (s^2 + \beta_1 s + \beta_0) \cdot \dots \cdot (s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0)}{s^m (s+p_1) \cdot \dots \cdot (s+p_k) \cdot \dots \cdot (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0) \cdot \dots \cdot (s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)}$$

Le Bode global se déduit alors facilement de la connaissance des Bode typiques de chaque facteur.

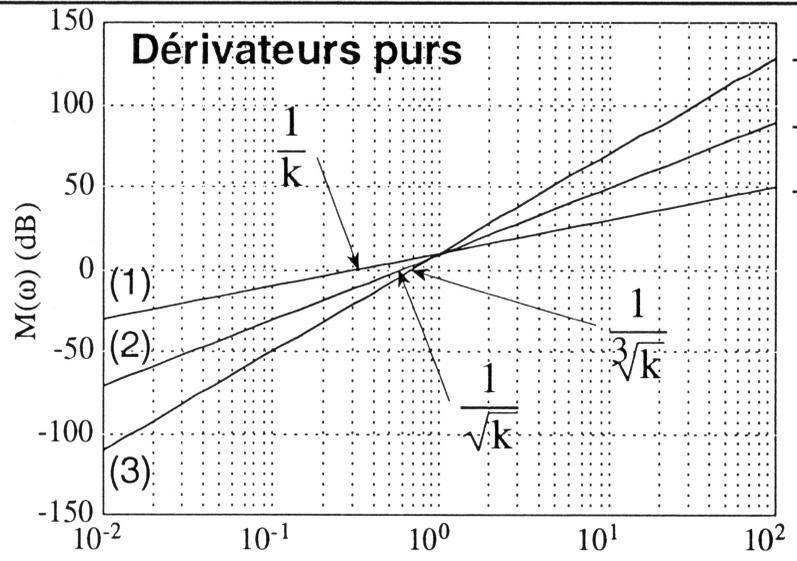


-20 dB/déc.  
-40 dB/déc.  
-60 dB/déc.

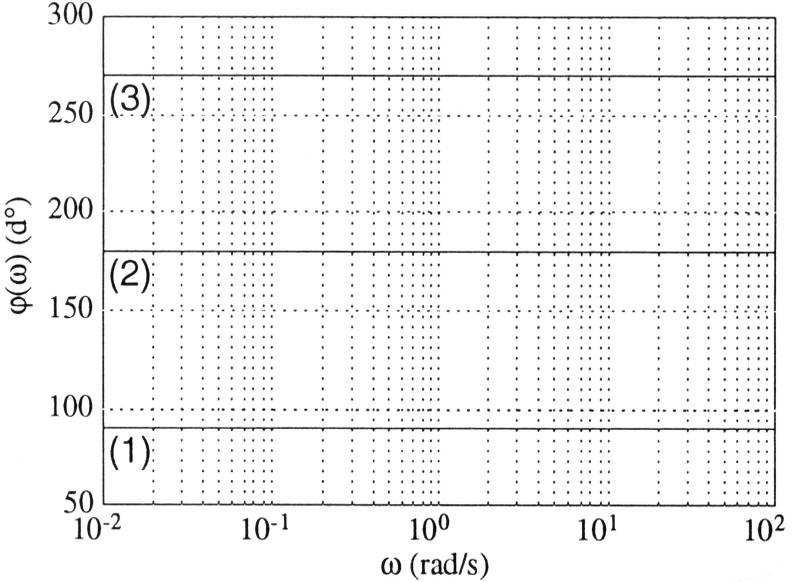


$\frac{k}{s}$  (1)  
 $\frac{k}{s^2}$  (2)  
 $\frac{k}{s^3}$  (3)

(k = 3)

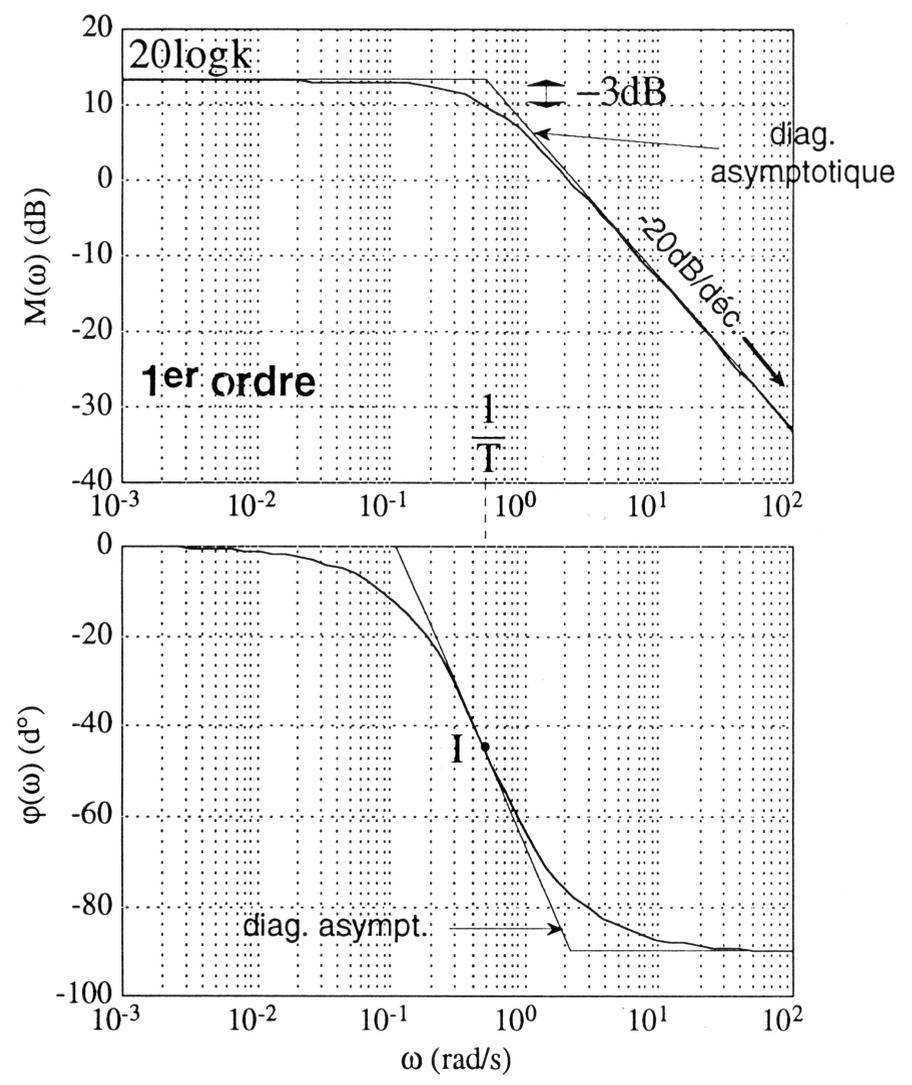


+60 dB/déc.  
+40 dB/déc.  
+20 dB/déc.

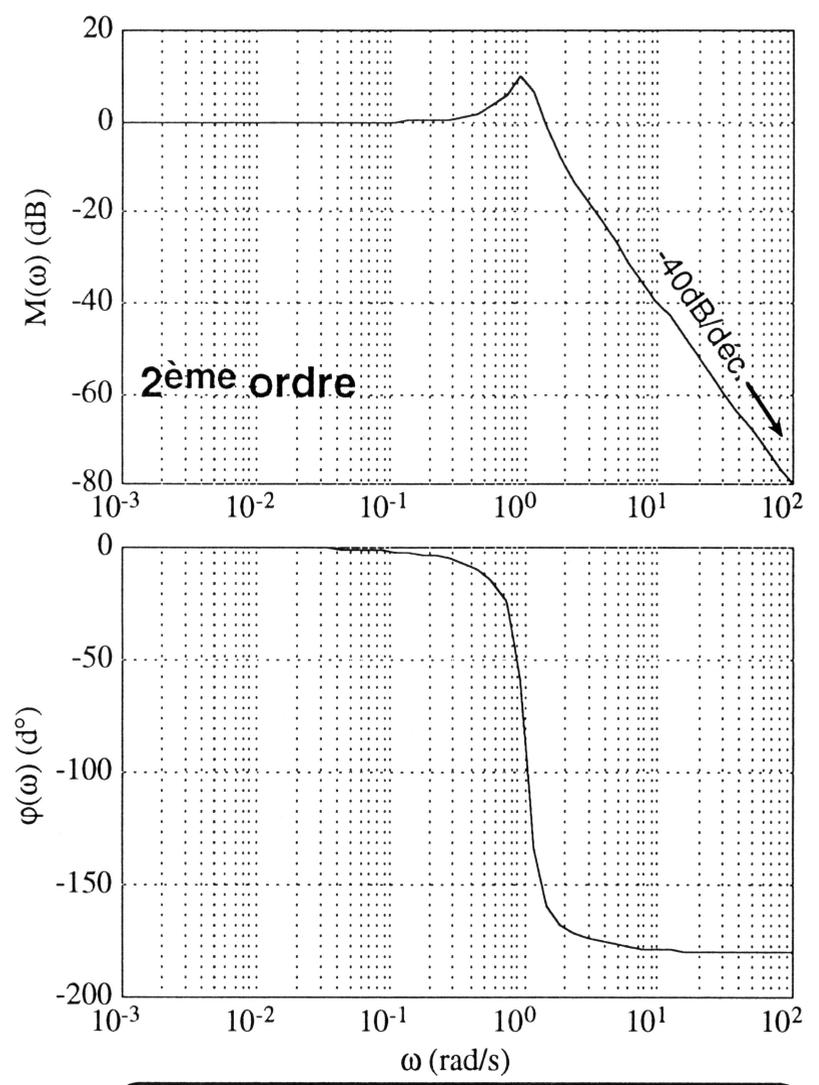


$ks^3$  (3)  
 $ks^2$  (2)  
 $ks$  (1)

Ex.:  $\frac{3}{s^3} \rightarrow M_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{3}{(j\omega)^3} \right| = 20 \log 3 - 60 \log \omega ; M_{dB}(10\omega) = 20 \log 3 - 60 \log(10\omega) = 9,54 \text{ dB} - 60 \log \omega - 60 \text{ dB}$



$$\frac{k}{1+sT} ; k=4,5 ; T=2$$

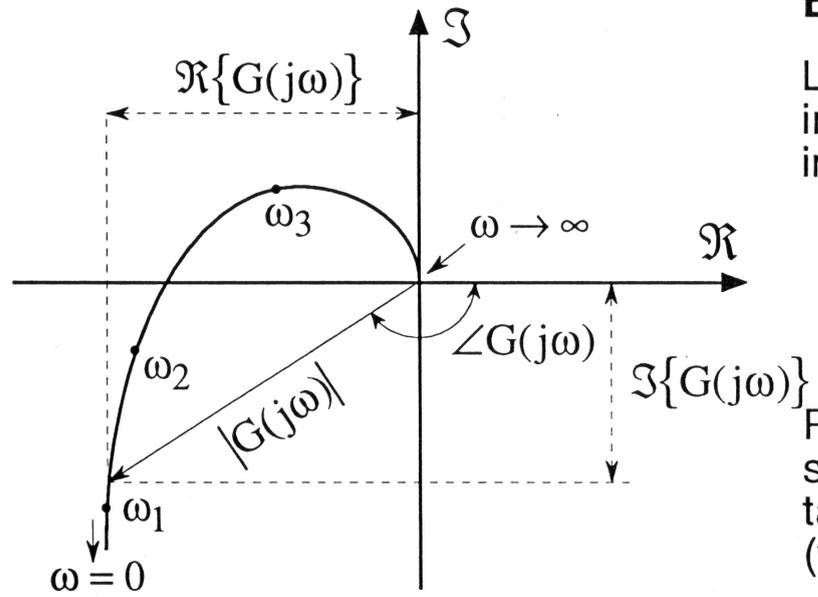


$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} ; \omega_0=1 ; \zeta=0,15$$

**Remarque :** la FT d'un système peut aisément être obtenue à partir du diagramme de Bode (ou approchée s'il s'agit d'une réponse fréquentielle expérimentale). Dans le cas des systèmes à minimum de phase, le diagramme en gain est suffisant.

### Diagramme de Nyquist :

L'avantage de la représentation de Nyquist est de concentrer le comportement fréquentiel sur toute la gamme de fréquence, en un seul diagramme. Elle utilise une représentation en coordonnées polaires dans le plan complexe. Ainsi, la courbe obtenue, appelée **lieu de Nyquist**, et qui doit être **graduée en pulsation** de  $\omega = 0$  à  $\omega = +\infty$ , est le **lieu parcouru par l'extrémité du vecteur  $G(j\omega) = M(\omega) \cdot \exp[j\varphi(\omega)]$**  lorsque  $\omega$  varie de zéro à l'infini. Bien sûr, les projections de  $G(j\omega)$  sur les axes réel et imaginaire sont ses parties réelle et imaginaire.

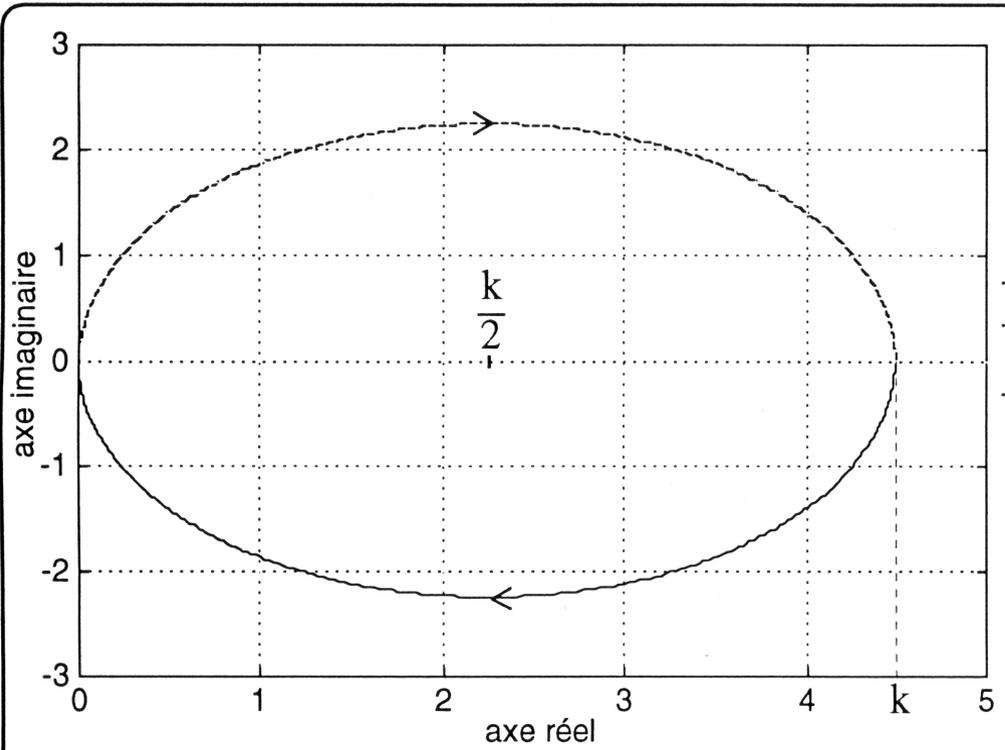


### Exemples :

Le Nyquist d'un intégrateur simple  $1/s$  est le demi-axe imaginaire négatif, celui du dérivateur  $s$  est le demi-axe imaginaire positif :

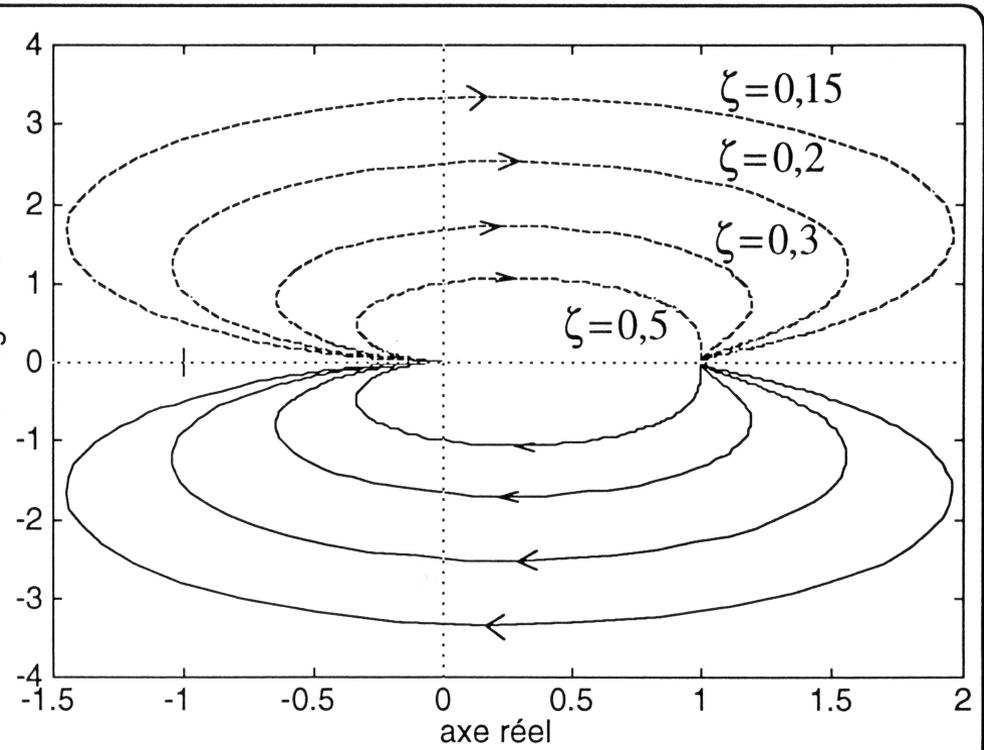
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ \qquad G(j\omega) = j\omega = \omega \angle +90^\circ$$

Par ailleurs, on montre que le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre a la forme d'un demi-cercle, tandis que celui d'un deuxième ordre est une demi-cardioïde (voir transparent suivant).



1er ordre :

$$\frac{k}{1+sT} ; k=4,5 ; T=2$$



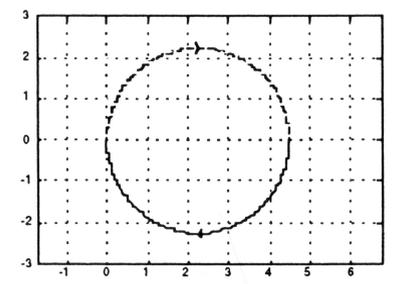
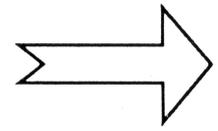
2ème ordre :

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} ; \omega_0=1$$

$$\frac{k}{1+j\omega T} \quad \omega=0 : G(j\omega) = k \angle 0^\circ \quad \omega = \frac{1}{T} : G(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty : G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -90^\circ$$

$$\left( \Re\{G(j\omega)\} - \frac{k}{2} \right)^2 + (\Im\{G(j\omega)\})^2 = \left( \frac{k}{1+\omega^2 T^2} - \frac{k}{2} \right)^2 + \left( \frac{-k\omega T}{1+\omega^2 T^2} \right)^2 = \left( \frac{k}{2} \right)^2$$

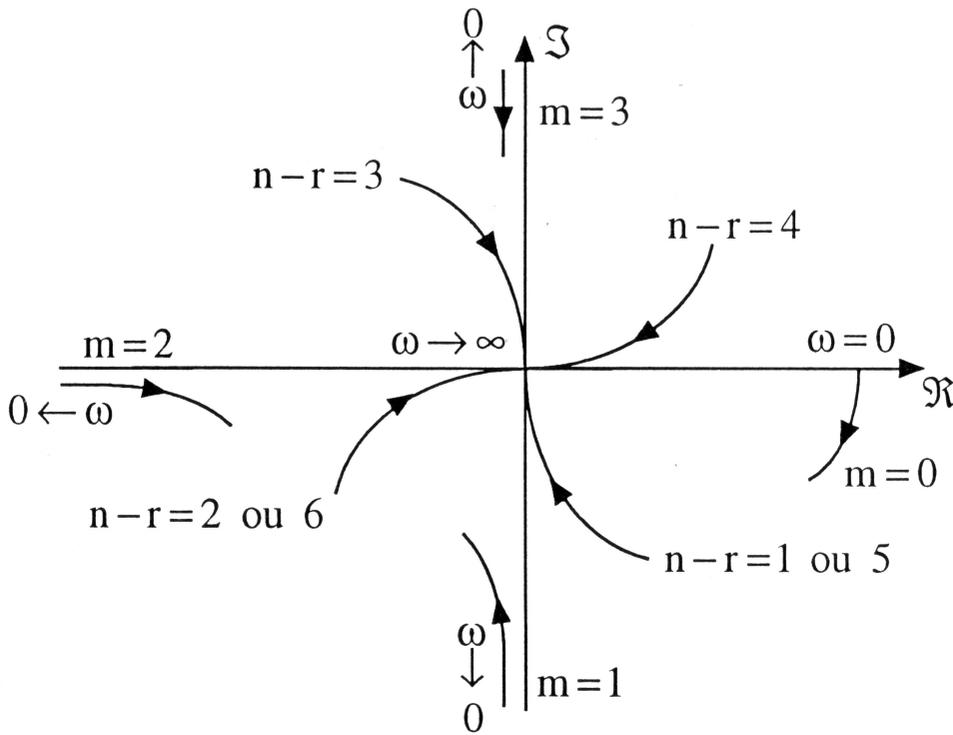


**Construction** : soit une réponse fréquentielle de la forme ( $n > r$ ) :

$$G(j\omega) = \frac{b_r(j\omega)^r + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0} \quad \text{ou} \quad G(j\omega) = \frac{b_r(j\omega)^r + \dots + b_1j\omega + b_0}{(j\omega)^m (a_{n-m}(j\omega)^{n-m} + \dots + a_1j\omega + a_0)} \quad \text{si } G(s) \text{ comporte des intégrations}$$

$$[G(j\omega)]_{\omega \rightarrow 0} = \frac{b_0}{a_0} \angle 0^\circ \quad [G(j\omega)]_{\omega \rightarrow 0} \cong \frac{b_0}{a_0(j\omega)^m} \Rightarrow \begin{cases} M(\omega) \rightarrow \infty \\ \varphi(\omega) \rightarrow -m \cdot 90^\circ \end{cases} \quad \text{Comportement en basse fréquence}$$

$$[G(j\omega)]_{\omega \rightarrow \infty} \cong \frac{b_r(j\omega)^r}{(j\omega)^m a_{n-m}(j\omega)^{n-m}} = \frac{b_r}{a_{n-m}(j\omega)^{n-r}} \Rightarrow \begin{cases} M(\omega) \rightarrow 0 \\ \varphi(\omega) \rightarrow -(n-r) \cdot 90^\circ \end{cases} \quad \text{Comportement en haute fréquence}$$



Pour les systèmes de **type 0** ( $m = 0$ ), la tangente au départ du Nyquist est verticale. Lorsque le système comporte une ou plusieurs dérivations (cas rare : une puissance de  $s$  en facteur au numérateur), le Nyquist démarre de l'origine. De façon générale, le lieu peut décroître continûment en module, ou bien présenter un (ou plusieurs) renflement(s) correspondant à une (des) résonance(s).

La représentation de Nyquist est très prisée par les automaticiens, qui l'utilisent notamment pour analyser la stabilité et la **correction** des systèmes bouclés. Dans le premier cas, la connaissance du départ et de l'arrivée du Nyquist, ainsi que d'un point particulier (**point critique**, v. 3.14) est souvent suffisante. Dans le second cas, on a besoin de connaître la forme du diagramme dans toute la zone du point critique.

**Exemple introductif :** on considère un véhicule en mouvement, dont on mesure la vitesse de déplacement  $v(t)$ . La position du véhicule à un instant donné  $t_1$  est donnée par :

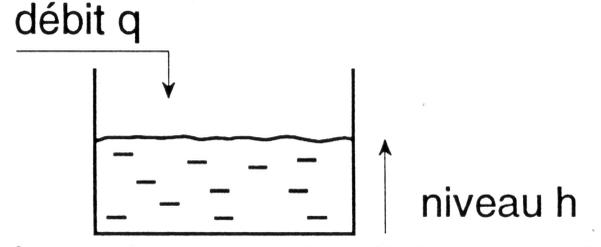
$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(\tau) d\tau$$

Pour simplifier, on peut considérer que  $y(t)$  est la distance parcourue entre  $t_0$  et  $t_1$ , et est donc donné par le compteur kilométrique journalier. Si celui-ci a été remis à zéro,  $y(t_0) = 0$ .

Pour bien comprendre la relation précédente, supposons que le voyage a duré 4 heures et que la vitesse du véhicule était de 80 km/h pendant les deux premières heures, puis de 100 km/h. La distance parcourue est alors donnée par :  $80 \text{ km/h} \times 2 \text{ h} + 100 \text{ km/h} \times 2 \text{ h} = 360 \text{ km}$ .

On retrouve dans cette dernière équation les notions de produit vitesse  $\times$  temps et de sommation ou d'accumulation des distances partielles parcourues. Si on considère à présent que le temps durant lequel le véhicule roule à vitesse parfaitement constante est infiniment petit  $d\tau$ , ce qui est bien plus conforme à la réalité physique, la distance parcourue est obtenue par l'intégrale (on dit souvent "somme de  $t_0$  à  $t_1$ ") du produit vitesse  $v(\tau)$  par durée  $d\tau$ .

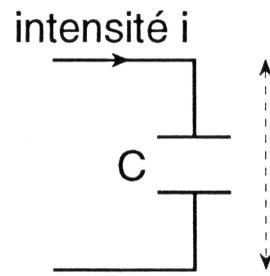
Ainsi, **l'intégrale traduit la notion physique de sommation ou d'accumulation**. Un système à comportement intégral ou intégrateur est caractérisé par une FT de la forme : **K/s**. Il agit comme un réservoir. **Exemples :**



débit  $q$

niveau  $h$

Réservoir de section  $S$  (vide au départ)

$$V(t) = S \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau \rightarrow \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{S \cdot s}$$


intensité  $i$

à conditions initiales nulles :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \rightarrow \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{C \cdot s}$$

Le condensateur joue donc le rôle de "réservoir" de tension. Sa capacité est analogue à la section du réservoir, d'ailleurs souvent appelée capacitance.

**Réponses temporelles :**

La réponse d'un intégrateur à un signal canonique s'obtient immédiatement. Si l'entrée est une impulsion, la sortie, c'est à dire la **réponse impulsionnelle**, peut être obtenue comme l'original de la FT, ou simplement en intégrant l'entrée, soit **un échelon**.

La **réponse indicielle**, c'est à dire la réponse à un échelon, est **une rampe**, etc. Ces caractéristiques sont celles d'un système **à la limite de stabilité**.

**Réponse fréquentielle :**

voir précédemment (Bode : gain = droite de pente -20 dB/déc., phase constante à -90°).

Les systèmes intégrateurs sont des **systèmes passe-bas**.

**Remarque :** on rencontre également des systèmes intégrateurs d'ordre supérieur, exemple : système à inertie. Il correspond au mouvement de translation (rotation) d'un véhicule libre de tout frottement et de toute force (couple) de rappel (satellite sur son orbite). Soit  $u(t)$  la force (couple) appliquée au système, l'équation différentielle est de la forme :

$$\ddot{y}(t) = k \cdot u(t) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2}$$

L'intérêt des modèles du premier et du deuxième ordre tient au fait qu'un grand nombre de systèmes physiques peuvent être réduits à l'un ou l'autre de ces modèles. Par ailleurs, les systèmes d'ordre supérieur peuvent souvent être considérés comme des combinaisons de systèmes du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre. Il est donc important de connaître leurs réponses aux différents signaux canoniques, ainsi que leur réponse fréquentielle, en vue de les comparer à celles des systèmes réels.

Le modèle du 1<sup>er</sup> ordre est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants :

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = k \cdot x(t) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{1 + s\tau} \quad k : \text{gain statique} ; T : \text{constante de temps}$$

### EXEMPLES :

On montre qu'en régime laminaire (ou pour de petites variations) :

$$S \cdot h(t) = \int_0^t [q_e(\tau) - q_s(\tau)] d\tau \rightarrow \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{S \cdot s + \frac{1}{R}}$$

$$q_s(t) = \frac{h(t) (m)}{R (m^{-2} \cdot s)}$$

← Résistance de la conduite

$$E(s) = R \cdot I(s) + \frac{I(s)}{Cs} = \frac{RCs + 1}{Cs} I(s)$$

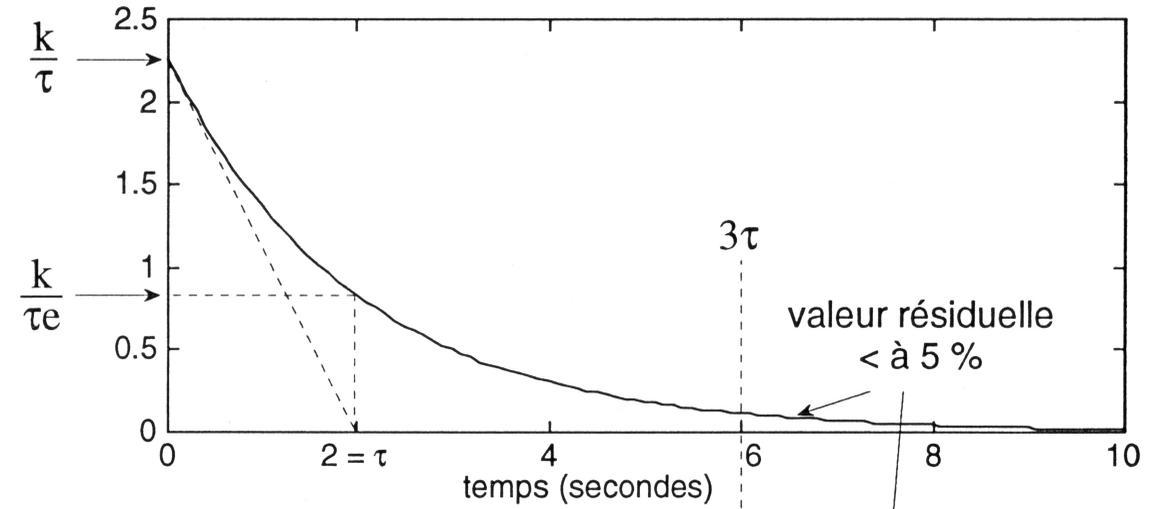
$$U(s) = \frac{I(s)}{Cs} \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$

**Autres exemples :** masse animée en translation (rotation) avec frottement, modèles de capteurs, modèle simplifié d'un moteur à courant continu, etc.

Réponse impulsionnelle :

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s).1$$

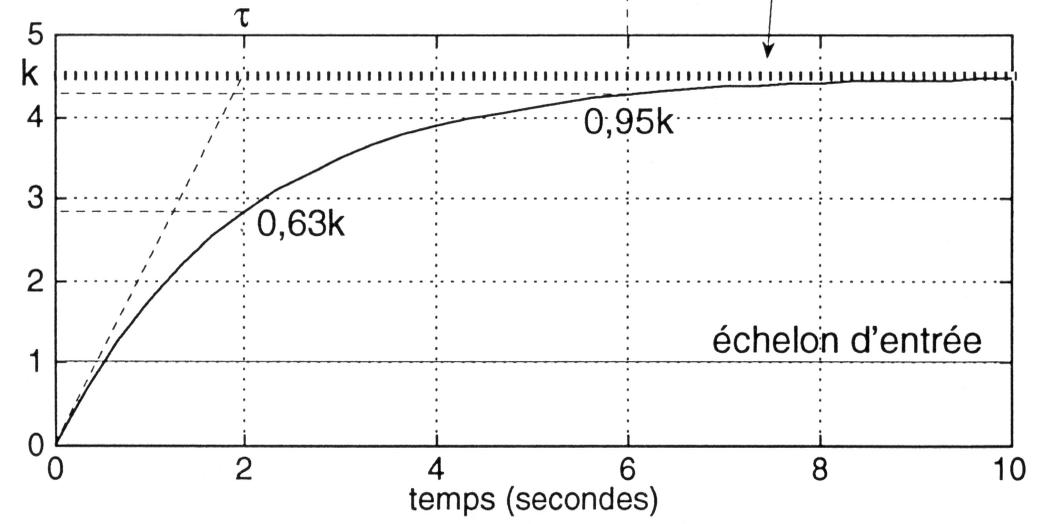
$$\rightarrow y(t) = g(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.1(t)$$



Réponse indicielle :

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k / \tau}{s(s + \frac{1}{\tau})}$$

$$\rightarrow y(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).1(t)$$



Réponse à la rampe : voir TD

Réponse fréquentielle : voir précédemment.

Le modèle du 2<sup>ème</sup> ordre est une équation différentielle linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients constants :

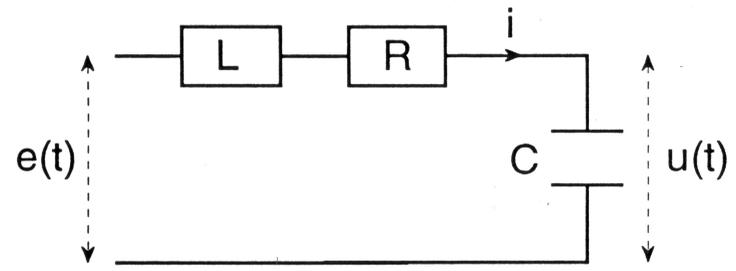
$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) \rightarrow G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1}$$

gain statique :  $k = \frac{b_0}{a_0}$

pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$

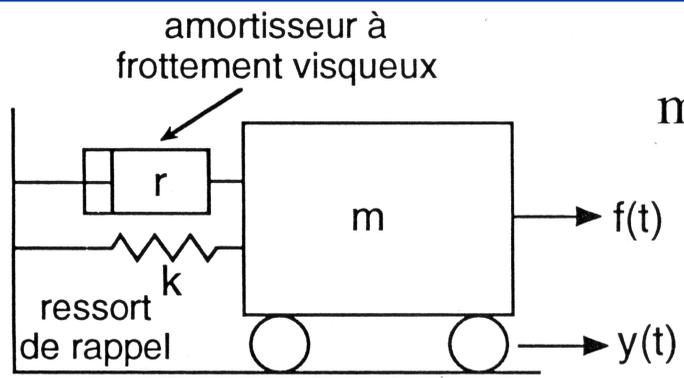
coefficient d'amortissement :  $\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$

### EXEMPLES :



$$E(s) = Ls \cdot I(s) + R \cdot I(s) + \frac{I(s)}{Cs} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} I(s)$$

$$U(s) = \frac{I(s)}{Cs} \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



$$m\ddot{y}(t) = f(t) - r\dot{y}(t) - ky(t) \rightarrow Y(s)(ms^2 + rs + k) = F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{r}{k}s + 1}$$

**Autres exemples :** moteur CC, suspension de voiture, accéléromètre, haut-parleur, etc.

**Réponses temporelles** : on se contente ici d'étudier la réponse indicielle. Le lecteur intéressé trouvera des précisions dans de nombreux ouvrages de référence (voir aussi TD et abaques). Pour simplifier, on suppose le gain statique  $k = 1$ .

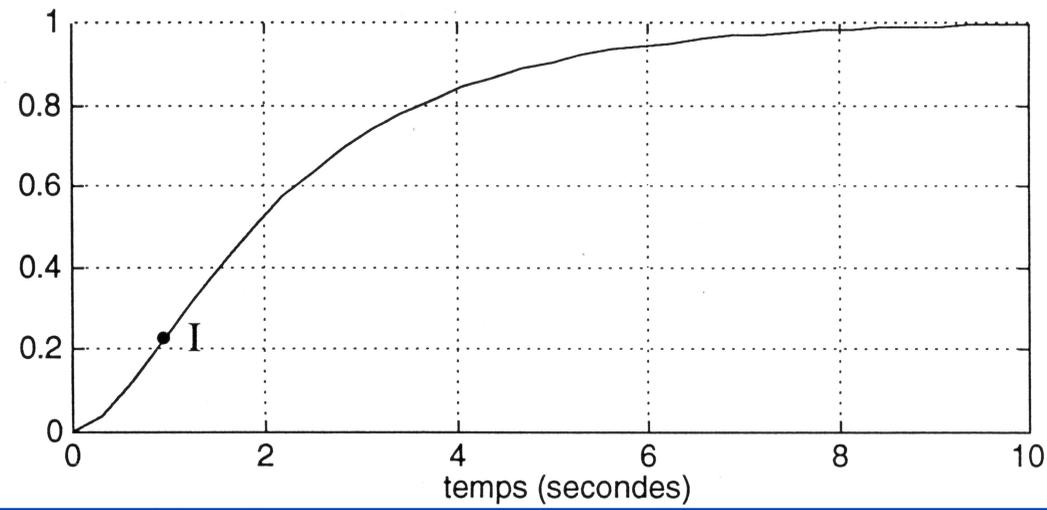
$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_0^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} \quad \text{soit, comme } \omega_0^2 = s_1s_2, \text{ et pour } s_1 \neq s_2 :$$

$$Y(s) = \frac{s_1s_2}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1-s_2} \left( \frac{s_2}{s-s_1} - \frac{s_1}{s-s_2} \right)$$

$$\rightarrow y(t) = \left[ 1 + \frac{1}{s_1-s_2} (s_2e^{s_1t} - s_1e^{s_2t}) \right] \cdot 1(t) \quad \text{Tout dépend des racines } s_1 \text{ et } s_2. \text{ Le discriminant } \Delta \text{ étant donné par : } \Delta = \omega_0^2(\zeta^2 - 1)$$

**2ème ordre apériodique** : les racines sont réelles distinctes  $\rightarrow \boxed{\zeta > 1}$   $s_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$

$$t_{\text{inflexion}} = \frac{1}{|s_2| - |s_1|} \text{Ln} \left| \frac{s_2}{s_1} \right|$$



La tangente initiale est horizontale. Après  $t_{\text{inflexion}}$ , le système se comporte à peu près comme un 1<sup>er</sup> ordre (l'une des exponentielles l'emporte sur l'autre). Ce système équivaut à deux systèmes du 1<sup>er</sup> ordre en cascade.

**2ème ordre critique** : une racine réelle double =  $-\omega_0 \rightarrow \zeta = 1$  réponse d'allure identique à la précédente :

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s + \omega_0)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(s + \omega_0)^2} \rightarrow y(t) = [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}].1(t)$$

**2ème ordre pseudopériodique** : racines complexes conjuguées  $\rightarrow \zeta < 1$

$$s_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}) = a \pm jb = \omega_0 e^{\pm j\phi} \quad \text{avec } \phi = \pi - \text{Arcsin} \sqrt{1-\zeta^2} \rightarrow \begin{cases} \cos \phi = -\zeta \\ \sin \phi = \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

On porte  $s_1$  et  $s_2$  dans l'expression de  $y(t)$  établie précédemment, en remarquant que  $s_1 - s_2 = 2jb$  :

$$\rightarrow y(t) = \left[ 1 + \frac{\omega_0}{2jb} (e^{-j\phi} e^{at+jbt} - e^{j\phi} e^{at-jbt}) \right].1(t)$$

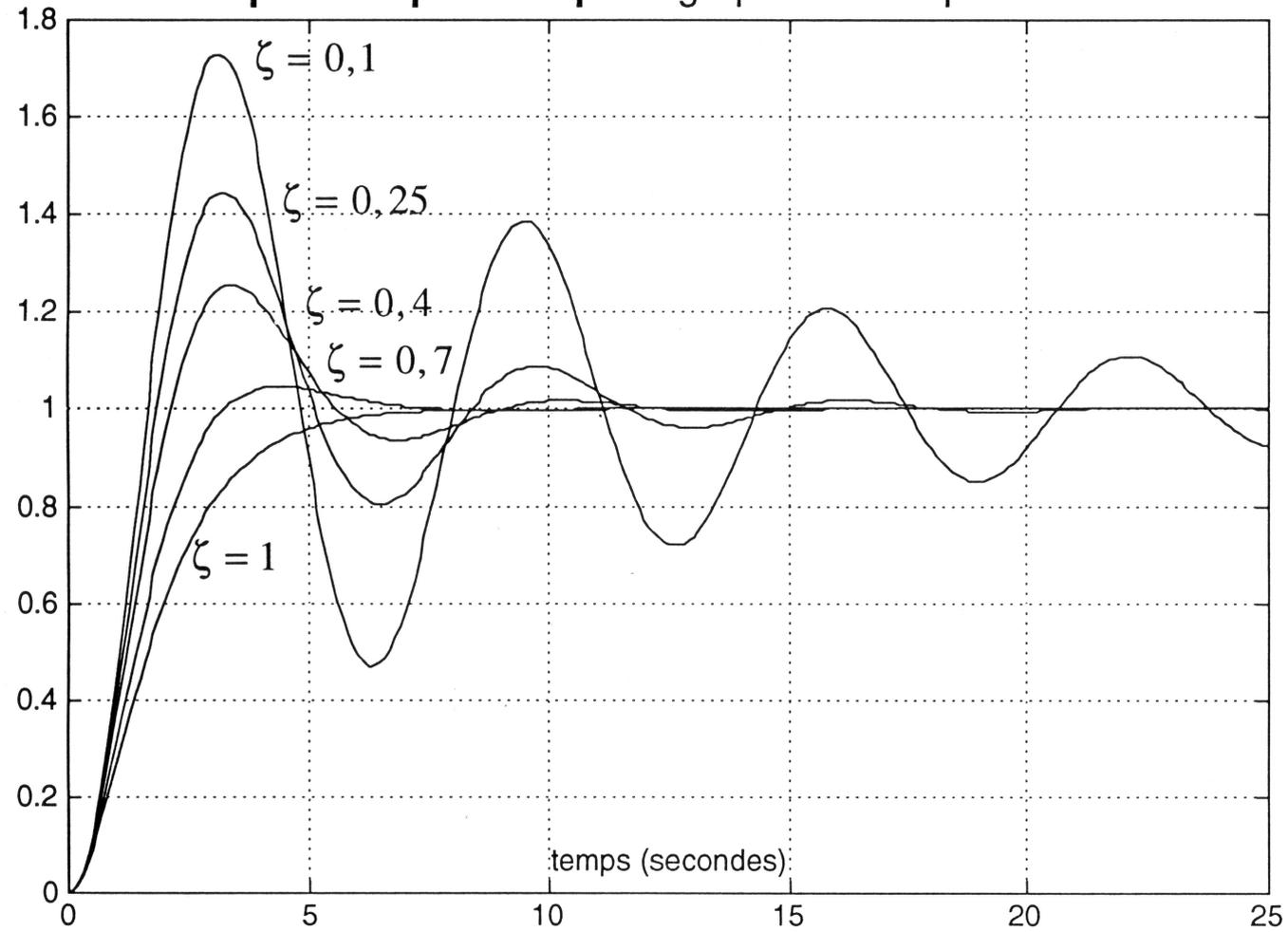
$$\rightarrow y(t) = \left[ 1 + \frac{\omega_0}{b} e^{at} \sin(bt - \phi) \right].1(t) ; \quad b = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} ; \quad a = -\omega_0 \zeta$$

$$\rightarrow y(t) = \left[ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{régime permanent}}}{1} - \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \text{Arcsin} \sqrt{1-\zeta^2}) \right].1(t)$$

régime permanent

régime transitoire

2ème ordre pseudopériodique : graphe de la réponse indicielle :



$$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \text{Arccos} \zeta)$$

$$t_{r_n\%} \approx \frac{1}{\omega_0 \zeta} \text{Ln} \left( \frac{100}{n} \right) ; (\zeta < 0,7)$$

$$t_{D1} \approx \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$D_1\% = 100 \exp \left( \frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \exp \left( \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

Le **temps de montée** correspond au temps mis pour atteindre la valeur finale. Le **temps de réponse à n%** est celui au bout duquel, la réponse reste dans un intervalle de  $\pm n\%$  de la valeur finale. Le **temps de pic** (ou de 1<sup>er</sup> dépassement) correspond au temps mis pour atteindre la valeur maximale.  $T_p$  désigne la **pseudo-période** i.e la période des oscillations. Le **taux de 1<sup>er</sup> dépassement** est défini comme l'amplitude du 1<sup>er</sup> dépassement  $y(t_{D1}) - y(\infty)$  en pourcentage de la valeur finale  $y(\infty)$ .

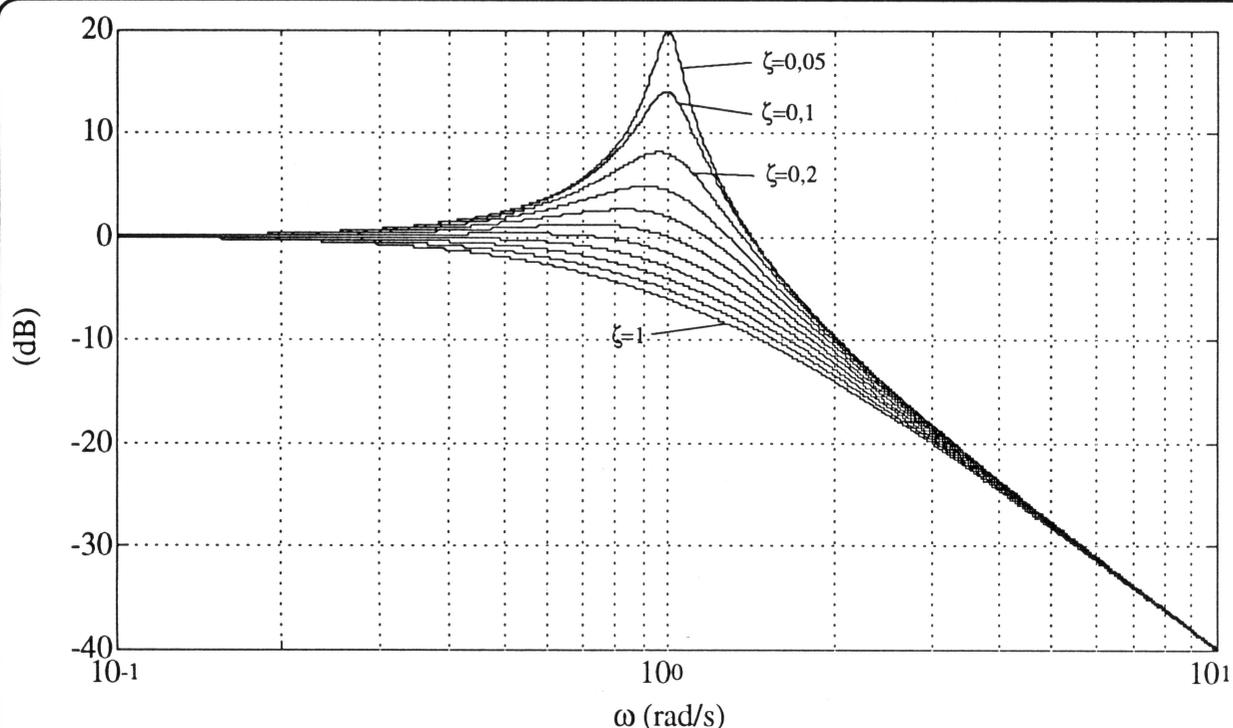


Diagramme de Bode du 2<sup>ème</sup> ordre pseudo-périodique :

pulsation de résonance

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

pulsation de coupure (-3 dB)

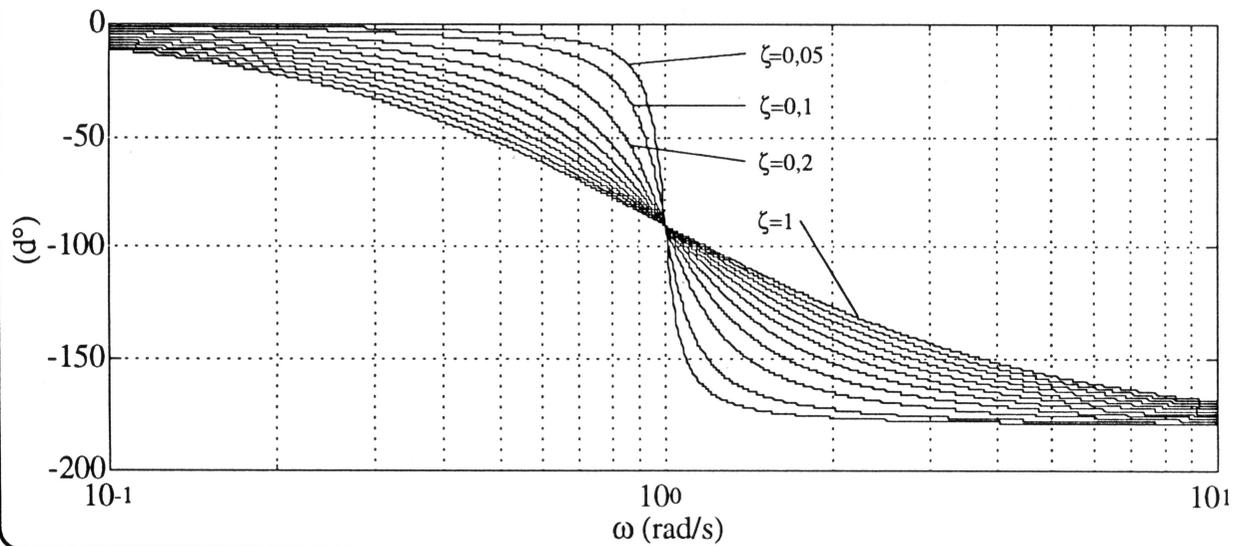
$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$$

facteur de résonance (amplitude à  $\omega_R$ )

$$m = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

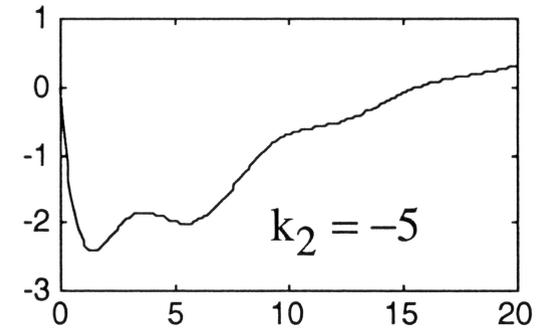
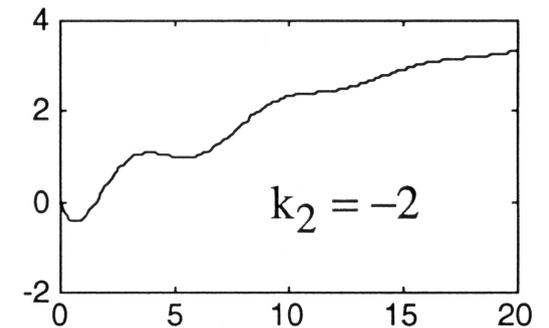
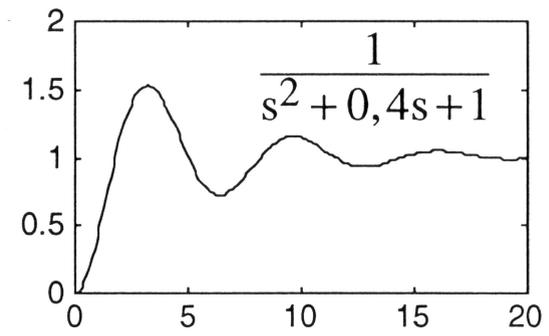
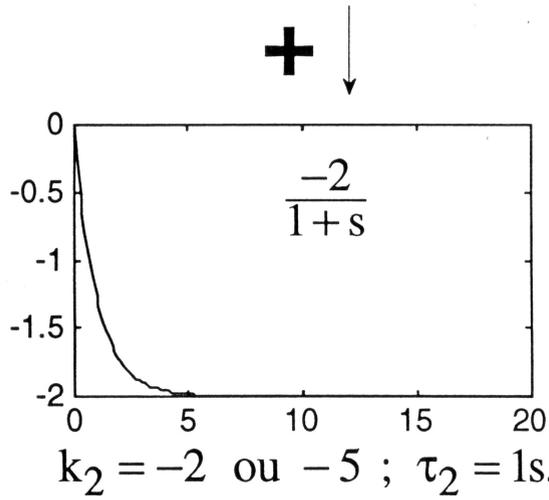
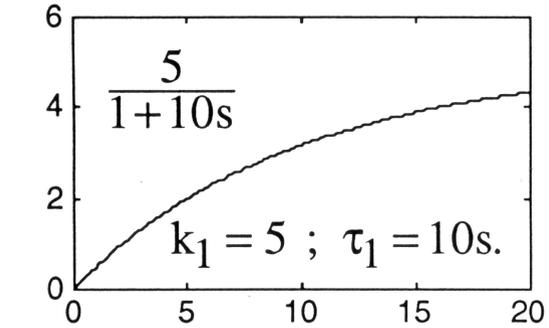
facteur de qualité (amplitude à  $\omega_0$ )

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$



La plupart du temps, la FT  $G(s)$  d'un système du  $n^{\text{ème}}$  ordre admet  $n$  pôles distincts : des pôles réels, donnant lieu à des éléments simples du premier degré, et des pôles complexes conjugués, donnant lieu à des éléments simples du deuxième degré.  $G(s)$  peut alors être décomposée en somme d'éléments simples, chacun étant représentatif d'un sous-système. **Le système complet est donc formé par l'association additive de sous-systèmes**, les uns du 1<sup>er</sup> ordre, les autres du 2<sup>ème</sup> ordre.

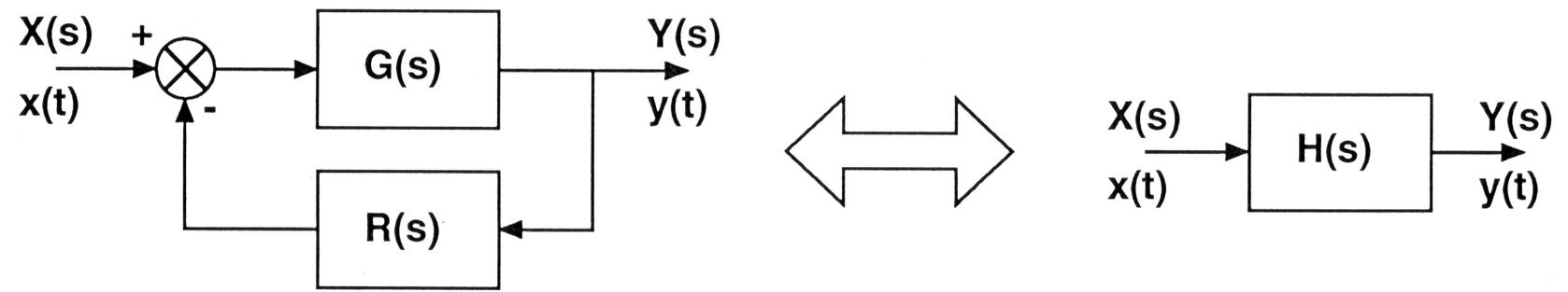
Ainsi, la réponse du système est la superposition des réponses de chaque sous-système. Elle est plus fortement marquée par certains **pôles (i.e modes) dits dominants** : constantes de temps les plus élevées, amortissements les plus faibles. Il est à noter que l'instabilité d'un seul sous-système entraîne bien sûr l'instabilité de l'ensemble.



constante de temps dominante :  $\tau_1$ .

Comme on l'a déjà évoqué et ainsi qu'on le verra ultérieurement plus en détail, la commande des systèmes repose généralement sur l'utilisation de **rétroactions** ou **contre-réactions**. On est dès lors confronté à des **structures en boucle**, que l'on représente sous forme de **schémas fonctionnels** ou **schémas-blocs**, ces derniers ayant la même forme dans le domaine temporel et dans le domaine de Laplace. La FT d'un système en boucle fermée s'exprime alors en fonction des transmittances des systèmes constituant la boucle.

### FT du schéma-bloc canonique :



$G(s)$  : FT de la **ligne (chaîne) directe**  
 $R(s)$  : FT de la **ligne de retour**

$G(s)R(s)$  : FT en boucle ouverte (**FTBO**)  
 $H(s)$  : FT en boucle fermée (**FTBF**)

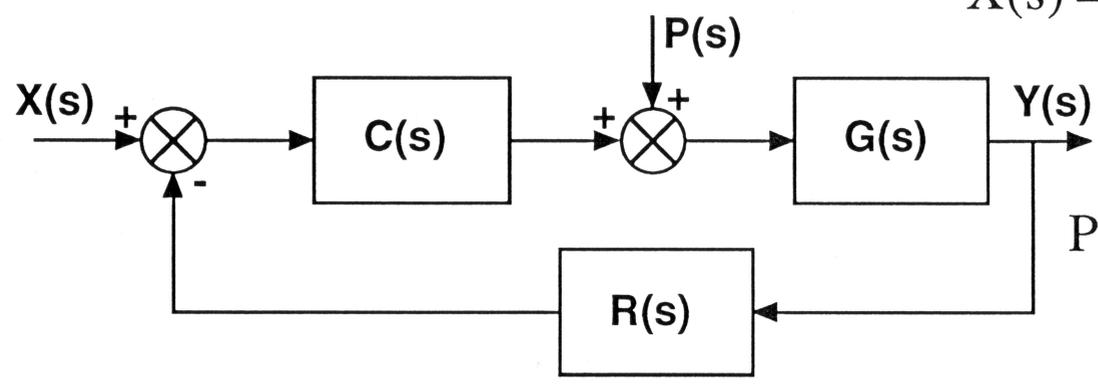
$$Y(s) = G(s)[X(s) - R(s)Y(s)] \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)R(s)}$$

### Remarques :

La FTBO et l'équation caractéristique du système bouclé  $1 + G(s)R(s)$  ont les mêmes pôles, mais des zéros différents.

Lorsque  $R(s) = 1$ , on parle de **système à retour unitaire**. Sa FTBF est donnée par :  $H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$

FT propre à une perturbation :



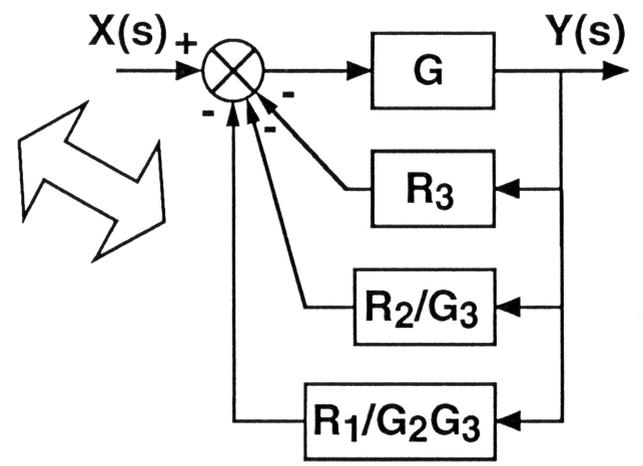
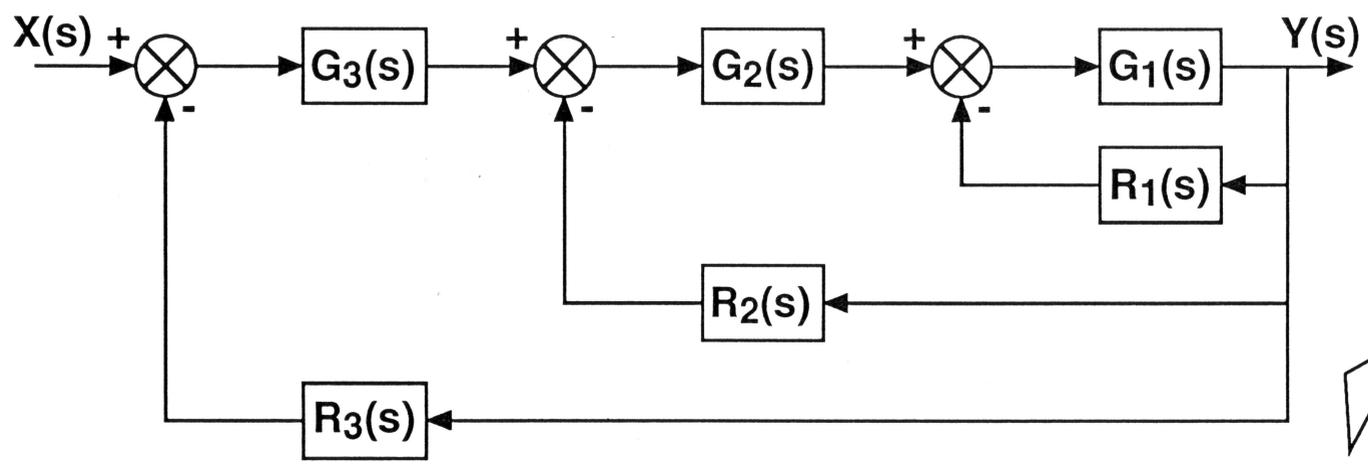
$$X(s) = 0 \rightarrow Y_p(s) = G(s)[P(s) - C(s)R(s)Y_p(s)]$$

$$\rightarrow \frac{Y_p(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)R(s)}$$

$$P(s) = 0 \rightarrow Y_x(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)R(s)} X(s)$$

linéarité  $\rightarrow Y(s) = Y_x(s) + Y_p(s)$

Réduction de schémas-blocs, exemple :

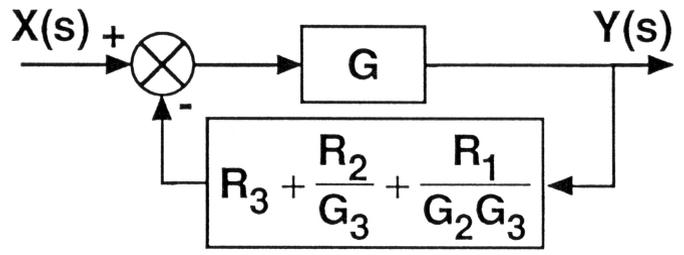


$$Y = G_1G_2G_3X - G_1G_2G_3R_3Y - G_1G_2R_2Y - G_1R_1Y$$

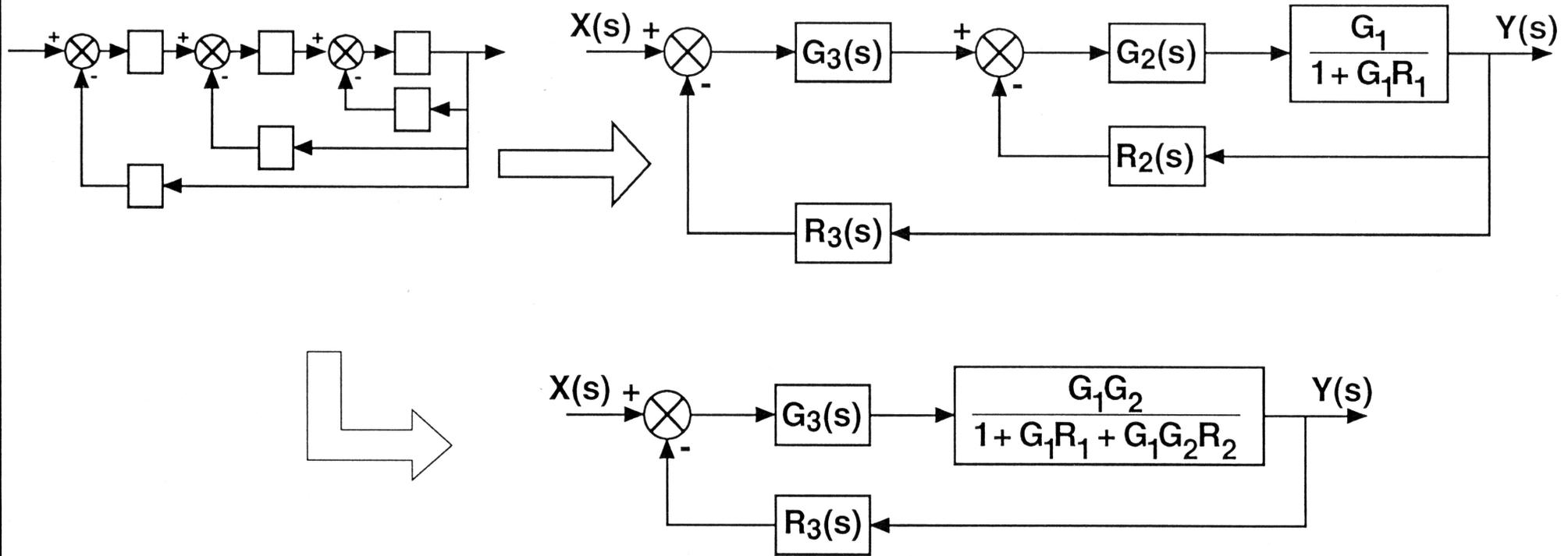
$$\rightarrow Y = G[X - R_3Y - \frac{R_2}{G_3}Y - \frac{R_1}{G_2G_3}Y] ; G = G_1G_2G_3$$

$$\rightarrow Y = G[X - (R_3 + \frac{R_2}{G_3} + \frac{R_1}{G_2 G_3})Y]$$

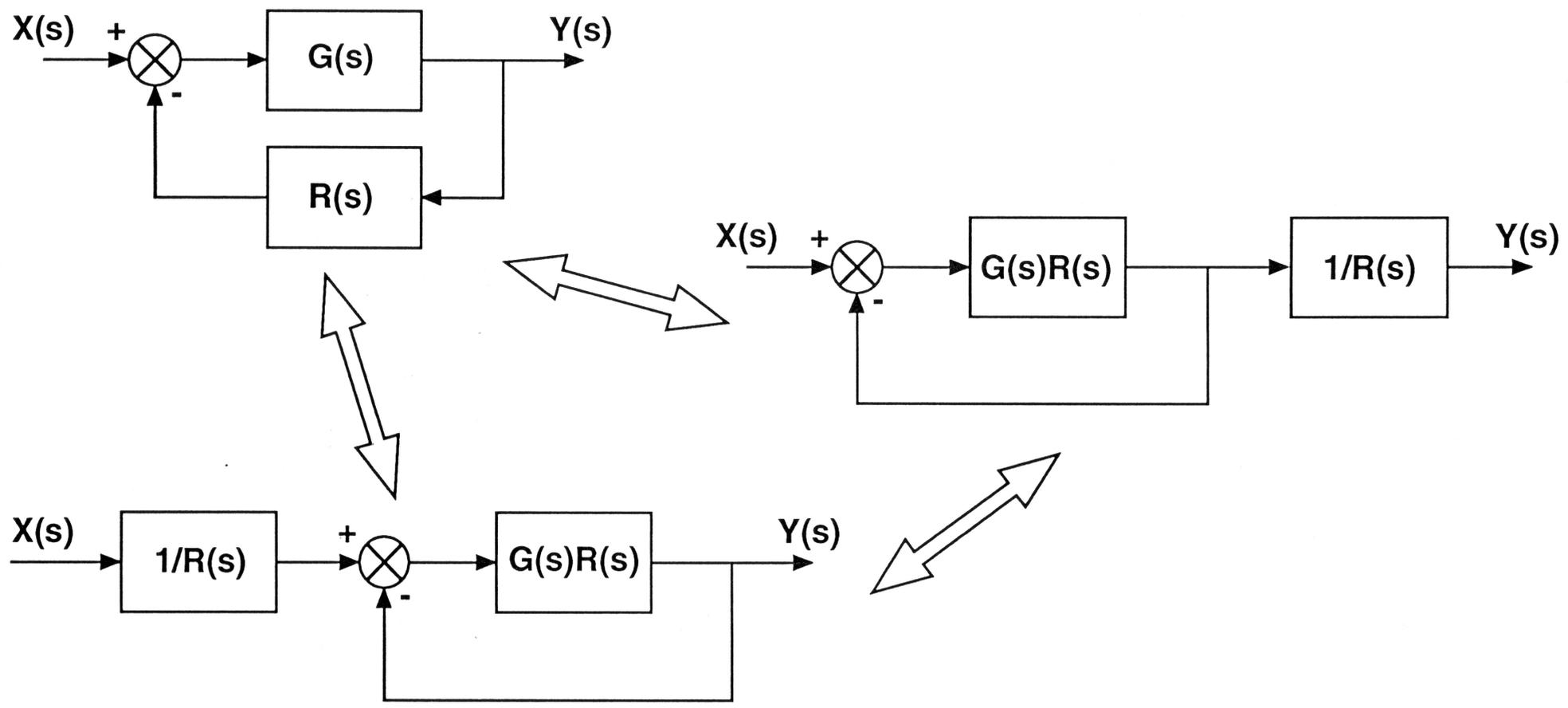
$$\rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 R_3 + G_1 G_2 R_2 + G_1 R_1}$$



Autre solution, élimination successive des boucles intérieures :



Bien que cela ne corresponde pas à la configuration réelle, il est souvent utile, à des fins d'analyse, de se ramener à un système avec retour unitaire :



De manière générale, deux schémas-blocs ne sont équivalents que s'ils obéissent à la même loi, c'est à dire s'ils ont la même transmittance.