Exercices

Arthur Garnier

February 10, 2015

24 Exercice 24

24.1

$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^a \frac{1}{a^2}e^{st} + \int_a^{2a} \frac{-1}{a^2}e^{st}dt = \frac{1}{a^2}[[\frac{-1}{5}e^{-st}]_0^a - [\frac{-1}{5}e^{-st}]_a^{2a}] = \frac{1}{a^2 s}[-e^{-as} + 1 + e^{-2as} - e^{-as}] = \frac{(1-e^{-as})^2}{a^2 s}$

$f(t) = \frac{1}{a^2}[1(t) - 2 \cdot 1(t-a) + 1(t-2a)]$

$F(s) = \frac{1}{a^2}[\frac{1}{s} - 2e^{-as}\frac{1}{s} + e^{-2as}\frac{1}{s}] = \frac{1}{a^2 s}(1-e^{-as})^2$

24.2

$r(t) = t \cdot 1(t)$ représente une droite

Il faut normaliser pour qu'à t=a/2, r(t) = 12/a^2

$g(t) = \frac{24}{a^3}r(t) - 2\frac{12}{a^2}1(t-\frac{a}{2}) - \frac{24}{a^3}r(t-a) = \frac{24}{a^3}[r(t) - a1(1-\frac{a}{2}) - r(t-a)]$

$G(s) = \frac{24}{a^3}[\frac{1}{s^2} - a\frac{1}{s}e^{-\frac{a}{2}s} - \frac{1}{s^2}e^{-as}]$

26 Exercice 26

26.1

$g(t) = a1(t) - a1(t-T) = a[a(t) - 1(t-T)]$

$G(s) = a[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}] = \frac{a}{s}[a - e^{-sT}]$

26.2

$G(s) = \frac{a}{s}(1 - e^{sT} + e^{-2sT} - e^{3sT} + ...] = \frac{a}{s}[(1-e^{-sT}) + e^{-2sT}(1-e^{-sT}) + ...] = \frac{a}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nsT}(1-e^{-sT}) = \frac{a}{s}(1-e^{-sT})\frac{1-(e^{-2sT})^{\infty}}{1-e^{-2sT}}$

ou

$g_T(t) = g(t) + g(t-2T) + g(t-4T) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} g(t-2nT) \Rightarrow G_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} G(s) \cdot e^{-2nsT} = G(s)\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2sT})^n$

28 Exercice 28

28.1 a

$x(t) = (a \cdot \sin^2(t) + b \cdot \cos^2(t)) \cdot 1(t) = (a \sin^2(t) + b(1 - \sin^2(t))1(t) = [b + (a-b)\sin^2(t)]1(t) = [b + \frac{(a-b)}{2}(1 - cos(2t)]1(t)$

$X(S) = \frac{a+b}{2S} + \frac{a-b}{2}\frac{S}{S^2+3}$

28.2 b

$x(t) = \int_0^t cos(t-x)sin(x)dx = cos(t)sin(t)$

$X(S) = \frac{S}{S^2+1} * \frac{1}{S^2+1} = \frac{S}{(S^2+1)^2}$

29 Exercice 29

$X(s) = 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

Décomposition en éléments simple :

- Méthode 1

$X(s) = 2 + \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} = 2 + \frac{a(s+2)+b(s+1)}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{(a+b)s+(2a+b)}{(s+1)(s+2)}$

$$\begin{cases} a+b=1 \rightarrow b = 1-1 \Rightarrow b = -1 \\ 2a+b = 3 \rightarrow 2a+1-a = 3 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

- Méthode 2

$a = (s+1) \cdot X(s)_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$

$b = (s+2) \cdot X(s)_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$

$x(t) = 2\delta(t) + 2e^{-t}1(t) - e^{-2t}1(t) = 2\delta(t) + e^{-t}(2 - e^{-t})1(t)$

31 Exercice 31

$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = x(t)$

Trouver $y(t)$ si $x(t) = \cos(t)1(t)$ sachant que les conditions initiales (CI) sont nulles.

$y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

$TL[\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t)] = T[x(t)] = [s^2Y(s) - y(0^+) - \dot{y}(0^+)] + [sY(s) - y(0^+)] + Y(s) = X(s)$

$(s^2 + s + 1)Y(s) = X(s)$

$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2+s+1}$

$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+s+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{\alpha s+\beta}{s^2+s+1} = \frac{(a+\alpha)s^3+(a+b+\beta)s^2+(a+b+\alpha)s+b+\beta}{(s^2+1)(s^2+s+1)}$

$[aj + b = (s^2+1)Y(s)]_{s=j} = \frac{j}{-1+j+1} = 1 \Rightarrow a = 0, b = 1$

$[aj+b=(s^2+1)Y(s)]_{s=-j}=\frac{-j}{-1-j+1}=1$

$\alpha(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})+\beta=(s^2+s+1)Y(s)_{\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}}{1/4(1-3-2\sqrt{3}j+1)}=2\frac{-1+\sqrt{3}i}{-1-2\sqrt{3}j}=\frac{2(1-\sqrt{3}j)(1-\sqrt{3}j)}{13}$

$Y(s)=\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{s^2+1}-1(s+1/2)^2-\frac{1}{4}+1=\frac{1}{s^2+1}-\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(s+1/2)^2+\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{4}{3}}$

$y(t)=(\sin(t)-\sqrt{\frac{4}{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin(\sqrt{\frac{3}{4}}t))1(t)$

32 Exercice 32

$\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+6x(t)=0$

Les conditions initiales sont :

$x(0)=0;\dot{x}(0)=3$

$TL[\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)]=T[x(t)]=s^2X(s)-\dot{x}(0)-3sX(s)+6X(s)=0$

Or $\dot{x}(0)=3$

$(s^2+3s+6)Y(s)=X(s)$

$s^2+3s+6=(s+3/2)^2+\frac{15}{4}$

$X(s)=\frac{3}{(s+3/2)^2+\frac{15}{4}}=3\frac{\sqrt{15/4}}{(s+3/2)^2+\frac{15}{4}}\sqrt{4/15}$

$x(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\sqrt{\frac{15}{4}}t)3\sqrt{\frac{4}{15}}1(t)$

71 Exercice 71

$x(k)=\frac{k}{n}-\frac{k-n}{n}1(k-n)$

$x(z)=\frac{1}{n}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})\check{s}}-\frac{1}{n}z^{-n}\frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^2}=\frac{1}{n}(1-n^{-n})\frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^2}$

69 Exercice 69

69.1 a

$x(t)=1(t)+\frac{1}{T}r(t)-2*1(t-T)-\frac{2}{T}r(t-T)+1(t-2T)+\frac{1}{T}r(t-2T)$

Avec $r(t-T)=(t-T)*1(t-T)$

Transformée de Laplace : $X(s)=\frac{1+ST}{TS^2}(1-e^{-ST})^2$

69.2 b

$\boxed{T_e=T}$

- x(k=0)=1
- x(k=1)=0
- x(k=2)=0

$x(k) = \delta(k) \Rightarrow X(z) = 1$

$\boxed{T_e = \frac{T}{2}}$

- x(k=0) = 1
- x(k=1) = 3/2
- x(k=2)=0
- x(k=3)=-1/2
- x(k=4) = 0

$X(z) = z^{-0} + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-3}$

$x(k) = \delta(k) + \frac{3}{2}(k-1) - \frac{1}{2}\delta(k-3)$

$x(kT_e) = 1(kT_e) + \frac{1}{T}r(kT_e) - 2 \cdot 1(kT_e - T) - \frac{2}{T}r(kT_e - T) + 1(kT_e - 2T) + \frac{1}{T}r(kT_e - 2T)$

Pour $T_e = T : x(kT) = 1(kT) + \frac{1}{T}r(kT) - 2 \cdot 1((k-1)T) - \frac{2}{T}r((k-1)T) + 1((k-2)T) + \frac{1}{T}r((k-2)T)$

$X(Z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{2z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{(a-z^{-1})^2}$

70 Exercice 70

70.1 a

$x(kT_e) = \frac{3}{4}r(kT_e - 4) - \frac{3}{4}r(kT_e - 12)$

Avec $T_e = 4$:

$x(t) = \frac{3}{4}r((k-1)T_e) - \frac{3}{4}r((k-3)T_e)$

Passage en Z

$X(z) = \frac{3}{4}\frac{z^{-1}z^{-1}T_e}{(1-z^{-1})^2} - \frac{3}{4}\frac{z^{-3}z^{-1}T_e}{(1-z^{-1})^2} = \frac{3z^{-2}(1-z^{-2})}{(1-z^{-1})^2} = \frac{3z^{-2}(1+z^{-1})}{1-z^{-1}}$

74 Exercice 74

$X(Z) = 4Z^{-1}\frac{1}{1-Z^{-1}} + \frac{2-3Z^{-1}}{1-Z^{-1}+Z^{-2}}Z^{-1}$

$e^{-2aT_e} = 1 \Rightarrow a = 0$

$e^{-aT_e}\cos(\omega T_e) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\omega T_e = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4T_e}$

Donc

$X(Z) = 4Z^{-1}\frac{1}{1-Z^{-1}} + \frac{6(1-\frac{1}{2}Z^{-1}}{1-2\frac{1}{2}Z^{-1}+1Z^{-1}}Z^{-1} - \frac{4Z^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-2\frac{1}{2}Z^{-1}+1 \cdot Z^{-2}}$

$\rightarrow x(k) = 4 \cdot 1(k-1) + 6\cos(\frac{\pi}{3}(k-1) \cdot 1(k-1) - 4\frac{2}{\sqrt{3}}k)1(k)$

77 Exercice 77

$X(z) = \frac{1}{(z-1)^2z^2} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z} + \frac{d}{z^2}$

$b = (z-1)^2X(z)|_{z=1} = 1$

$d = Z^2X(z)|_{z=0} = 1$

$X(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z^2} = \frac{a}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{c}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{a(z-1)z^2 + z^2 + cz(z-1)^2 + (z+1)^2}{(z-1)^2 z^2 + z^2 - 2z + 1}$

$a + c = 0 \to c = -a$

$-a - 2c + 2 = 0 \to -a + 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, c = 2$

$X(z) = \frac{-2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = 2z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + 2z^{-1} + z^{-2}$

$z(k) = -2 \cdot 1(k-1) + r(k-1) + 2\delta(k-1) + \delta(k-z) = -2 \cdot 1(k-1) + (k-1) \cdot 1(k-1) + 2\delta(k-1) + \delta(k-z)$

79 Exercice 79

$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, x(0) = 0, x(1) = 1$

$Z(x(k-m)) = z^{-m}X(z) + x(-1)z^{-(m-1)} + x(-2)z^{-(m-2)} + ...$

$Z(x(k+m)) = z^m[X(z) - x(0)z^0 - x(1)z^{-1} - ... - x(x(m-1)z^{-(m-1)}]$

$z^2[X(z) - x(0)z^0 - x(1)z^{-1}] + 3z[X(z) - x(0)z^0] + 2X(z) = z^2X(z) - z + 3zX(z) + 2X(z) = 0$

$X(z)(z^2 + 3z + 2) = z \Leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z^2+3z+2} = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z+2} + \frac{az+2a+bz+b}{(z+1)(z+2)} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow a = -1 \\ 2a + b = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$= \frac{-1}{z+1} + \frac{2}{z+2} = z^{-1}\frac{3}{z+1} + 2z^{-1}\frac{z}{z+2}$

$x(k) = -1(-1)^{k-1}1(k-1) + 2 \cdot (-2)^{k-1}1(k-1) = [(-1)^k - (-2)^k]1(k-1) = (1 - 2^k)(-1)^k 1(k-1)$

98 Exercice 98

Echantillonage : $x'_k = x(kT_e), t = kT_e$

$f_e = 6kHz$

99 Exercice 99

$f(t) = a_1 \sin(2\pi t) + a_2 \sin(20t)$

f(t) contient 2 fréquences :

Fréquence 1 : 1Hz

Fréquence 2 : $10/\pi$ Hz $\approx$ 3.18Hz

$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi)$

ω_0 = pulsasion = $2\pi f_0$

f_0 = fréquence

f(t) est échantillonné à la période $T_e = 0.2s \Rightarrow \frac{1}{T_e} = 5Hz$

Les fréquences présente dans le signal échantillonné sont :

- $f_1 + nf_e, n \in \mathbb{Z}$
- $f_2 + nf_e, n \in \mathbb{Z}$

Les fréquences visibles sont toutes celles comprises entre $f_e/2$ et $f_e/2$

Soient :

- $f_1 = 1Hz$
- $f_2 = -f_2 + f_e = 5 - 3.18 = 1.82$

101 Exercice 101

La pression est mesurée en continue, sa période d'oscillation est correcte.

$T_{osc} = 2.11Min \Rightarrow f_{osc} = \frac{1}{2.11*60} = 7.9 \cdot 10^{-3}Hz$

La fréquence d'échantillonnage de la temp est :

$T_e = 2min \Rightarrow = \frac{1}{2*60} = 8.33 \cdot 10^{-3}$

Si la fréquence $\mathrm{f_{osc}}$ est présente sur la température, on observera l'alias de $\mathrm{f_{osc}}$ qui est : $f_e - f_{osc} = (8.33 - 7.9)10^{-3}Hz = 0.43 \cdot 10^{-3}Hz$

Ce qui correspond) la période : $\frac{1}{0.43 \cdot 10^{-3}} \approx 2400sec \approx 38min$

Il faut que $T_e < \frac{T_{osc}}{2} = 1.05sec$