

TELECOM Nancy (ESIAL)
Maths Numériques

TP1 : arithmétique flottante et systèmes linéaires

Exercice 1 *Une étude de précision*

Voici un exercice provenant du TD1. On cherchait à calculer la fonction :

$$\phi(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = \frac{-2x}{(1+x)(1-x)}$$

pour un nombre flottant x tel que $|x|$ est assez petit (on suppose que $|x| < 0.1$). Le résultat de cet exercice est qu'une évaluation basée sur la deuxième formule présente une très faible erreur relative alors que la première comporte un risque d'erreur lorsque x se rapproche de zéro. Vous allez réaliser une étude numérique pour mettre en évidence les défauts de la première formule (en se servant de la deuxième comme référence). Pour cela vous allez écrire un script/module python qui :

1. va balayer des petits nombres grâce à la fonction `logspace` du module `numpy`¹ :

```
n = 2000
x = logspace(-17, -1, n)
```

permet d'obtenir un vecteur x dont les composantes vont de 10^{-17} à 10^{-1} avec n composantes en tout et une répartition logarithmique (on a $x_i/x_{i+1} = Cte$).

2. calcule ensuite les ordonnées correspondantes aux deux formules. Avec y_2 supposée "exacte", calculer l'erreur absolue (`ea = abs(y1 - y2)`) puis l'erreur relative.
3. et finalement affiche l'erreur relative en échelle log. Attention dans certains cas les deux formules donneront le même résultat (c-a-d que la première fonction marche bien sur certains arguments) et l'erreur relative obtenue (0 donc) ne peut pas s'afficher en échelle log (pourquoi?). Lors de l'affichage de la courbe vous pouvez sélectionner les composantes des vecteurs qui correspondent à une erreur absolue non nulle grâce à un indicage booléen obtenu avec l'expression `ea>0` (la courbe en échelle log-log s'obtient avec `loglog(x[ea>0], er[ea>0], ...)`)

Une "quasi" borne pour l'erreur relative est :

$$|e_r| \lesssim \frac{2\epsilon_m}{|x|}$$

Visualiser cette borne dans le même graphe.

Rmq : pour obtenir un graphe en échelle loglog, il suffit de remplacer `plot` par `loglog`. Comme python travaille en double précision, on a $\epsilon_m = 2^{-53}$.

Question : pourquoi la partie gauche de la courbe est constante et égale à 1 lorsque $|x|$ est suffisamment petit (vous pouvez mieux mettre ce phénomène en évidence en partant de 10^{-18} plutôt que de 10^{-17}) ?

1. Avec spyder et en exécutant le fichier via l'interface, vous disposez directement des fonctionnalités des modules `numpy` et `matplotlib` (sans avoir à rajouter de préfixe) il est donc en fait inutile de rajouter l'instruction `from pylab import *` dans votre fichier.

Exercice 2 *Mini module d'algèbre linéaire*

Le but de cet exercice est de coder un petit module d'algèbre linéaire² appelé `syslin` contenant les fonctions suivantes :

1. une fonction d'entête :

```
def lu_fact(A):
    # A est une matrice n x n dont on calcule
    # la factorisation LU simple
    # on renvoie 2 objets: le tableau LU qui
    # contient la factorisation de maniere compacte
    # et un entier donnant le statut de calcul
    # istat = -1 si A n'est pas carree (noter qu'il est possible de
    #          conduire une factorisation sur une matrice rectangulaire)
    #          0 OK
    #          k > 0 : le pivot naturel a l'etape k est nul
```

qui effectue la factorisation $A = LU$ de la matrice A .

Remarques :

- (a) le tableau d'entrée ne doit pas être modifié, la factorisation sera faite dans un tableau obtenu initialement par copie : `LU = A.copy()` ;
- (b) les dimensions peuvent se récupérer avec `n,m = np.shape(A)`.

Pour tester cette première fonction, une fois votre module (exécuté/chargé via l'interface graphique de spyder) vous pourrez rentrer les instructions suivantes dans la fenêtre de commande de spyder :

```
A = rand(4,4)           # une matrice 4x4 avec des réalisations indépendantes de U(0,1)
LU, istat = lu_fact(A) # factorisation
L = tril(LU,-1) + identity(4) # reconstitution de L
U = triu(LU)           # reconstitution de U
A - dot(L,U)          # doit donner une matrice proche de 0
```

2. une autre fonction d'entête :

```
def lu_solve(LU,b):
    # resoud Ax=b connaissant la factorisation LU de A
    y = b.copy()
    n = len(y)
```

pour résoudre un système linéaire, lorsque l'on connaît la factorisation $A = LU$. Pour tester votre fonction vous pouvez essayer de retrouver la solution du système linéaire de l'exercice 3 de la feuille 2 de TD. Dans ce but vous pouvez écrire la fonction suivante dans le module `syslin` qui retourne la matrice, le second membre et la solution de ce système linéaire :

```
def exercice3():
    """retourne la matrice, le second membre et la solution du systeme lineaire de l'exercice 3"""
    # on suppose que numpy est importe sous le nom np (import numpy as np)
    A = np.array([[1,2,3,4], [1,4,9,16], [1,8,27,64], [1,16,81,256]],float)
    b = np.array([2,10,44,190],float)
    x = np.array([-1,1,-1,1],float)
    return A,b,x
```

2. Ici l'exercice est d'écrire un vrai module python capable de fonctionner en dehors de l'environnement spyder. Ainsi vous devrez donc importer le module `numpy` dans votre module, vous pouvez utiliser `import numpy as np` et ainsi toutes les fonctions de `numpy` sont accessibles avec le préfixe `np..`