Feuille 4 : Interpolation

Arthur Garnier

1 Exercice 1

$p(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$

$L_i(x) = \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$p(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} \left(y_i \prod\limits_{j=0, j\neq 1}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)$

$L_0(x) = \frac{x-x_j}{x_i-x_j} ...$

2 Exercice 2

2.1

2.2

$(uv)' = u'v + uv'$

$(u(vw))' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$

En généralisant : $(u_0 u_1 ... u_n)' = u_0' u_1 ... u_n + u0 u_1' u_2 .... u_n + ... + u_0 ... u_{n-1} u_n' = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} u_j \right) u_i'$

$\Phi'(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i'(t) \cdot \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} u_j(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} 1 \cdot \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (t - x_j) = \sum\limits_{i=0, i\neq k}^{n} \left(\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (t - x_j) \right) + \prod\limits_{i=0, j\neq k}^{n} (t - x_j)$

$\Phi'(x_k) = \sum\limits_{i=0, i\neq k}^{n} \left(\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_k - x_j) \right) + \prod\limits_{i=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)$

$\Phi'(xk) = \prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)$

//En déduire...

$L_k(t) = \prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{t-x_i}{x_k-x_i} = \frac{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (t-x_i)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k-x_i)} = \frac{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (t-x_i)}{\Phi'(xk)} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (t-x_i)}{(t-x_k)\Phi'(x_k)}$ (si $t \neq x_k$)

$p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k L_k(t)$, supposons $t \neq x_k \forall k \in [[0, n]]$

$p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \frac{\Phi(t)}{(t-x_k)\Phi'(x_k)} = \Phi(t) \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(t-x_k)\Phi'(xk)} \right)$

On sait que $q(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} 1 * L_i(t)$ et $t \mapsto 1$

De plus

$1 = q(t) = \Phi(t) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(t-x_k)\Phi'(x_k)}$, Ok si $t \neq x_k \forall k$

$p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \frac{\Phi(t)}{(t-x_k)\Phi'(x_k)} = \Phi(t) \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(t-x_k)\Phi'(x_k)} \right) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(t-x_k)\Phi'(x_k)}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(t-x_k)\Phi'(x_k)}}$ avec $t \neq x_k \forall k$

3 Exercice 3 Tp2

Codage de $\Phi'(xk) = \prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)$

```
wk=[]
x=[]
pour k de 0 à n
    wk=1
    pour i de 0 à n
        si i != k alors
            wk = wk*(xk-xi)

eval_lagrange_fb(entrées : t, x, y, w)
    s'il existe i dans [[0,n]] tq t=xi
        retourner yi
    sinon
        nom=0; denom=0
        pour k de 0 à n
            d=(t-k)wk
            nom=nom+yk/d
            denom=denom + 1/d
        retourner nom/denom
```

4 Exercice 4

4.1

Algorithme pour sin x : Compte tenu qu'on approche sin x $sin[0, \frac{\pi}{2}]$ par un certain polynôme p.

Règles permettant de réduire l'intervalle :

- Imparité : $sin(-x) = -sin(x) \rightarrow$ on se ramène à un argument positif.
- Périodicité : On se ramène à $[0, 2\pi]$
- Imparité autour de π
- Parité autour de $\pi/2$

Tip :

- $sin(x) = sin(\pi + \delta) = -sin(\pi - \delta)$
- $\pi - (x - \pi) = 2\pi - x \Rightarrow sin(x) = -sin(2\pi - x)$
- $sin(x) = sin(\pi - x)$

Sous forme algorithmique :

```
signe = 1
si x < 0 alors
    x=-x
    signe=-1
//Périodicité ?
k=floor(x/2*pi)
x=x-k*2*pi
//Imparité autour de pi
si x > pi alors
    x=2*pi - x
    signe=-signe
si x > pi/2 alors
    x=pi-x
retourner signe*p(x)
```

5 Exercice interpolation

On dispose de 3 points $(t_i, y_i), i = 1, 2, 3$

On veut interpoler ces 3 points avec la famille de fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ avec :

- $\varphi_1 : t \mapsto 1$
- $\varphi_2 : t \mapsto sin(t)$
- $\varphi_3 : t \mapsto cos(t)$

C'est à dire que l'on cherche les coefs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tel que :

$\alpha_1\varphi_1(t_i) + \alpha_2\varphi_2(t_i) + \alpha_3\varphi_3(t_i) = y_i, i = 1, 2, 3$ soient satisfaites

5.1 Poser ce problème d'interpolation comme un système linéaire

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \sin(t_1) + \alpha_3 \cos(t_1) = y_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin(t_2) + \alpha_3 \cos(t_2) = y_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin(t_3) + \alpha_3 \cos(t_3) = y_3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & sin(t_1) & cos(t_1) \\ 1 & sin(t_2) & cos(t_2) \\ 1 & sin(t_3) & cos(t_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

Première matrice = A

On donne $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi$

Avec ces valeurs on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Commençons gauss :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$