TELECOM Nancy *(ESIAL)*
Maths Numériques

feuille 2 : résolution de systèmes linéaires

Notations et rappels :

— Si A est une matrice (n,m), A_i désigne la matrice $(1,m)$ (appelée aussi vecteur ligne) formée par la i ème ligne de A et A^j désigne la matrice $(n,1)$ (appelée aussi vecteur colonne) formée par la j ème colonne de A.

— On remarque que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (on considèrera toujours chaque vecteur comme une matrice unicolonne) :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e^1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{e^2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k$$

qui fait apparaître la base $(e^1, e^2, \dots, e^n)$ appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$ (cette famille est génératrice par définition mais on montre très facilement qu'elle est libre). On a $(e^j)_i = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker).

— Si A est une matrice (n,m) et B une matrice (m,p) alors le produit matriciel AB est bien défini et donne une matrice de taille (n,p) avec :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$$

— Si A est une matrice (n,m) alors $A^\top$, la transposée de A est une matrice (m,n) avec $(A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$ (les lignes de A forment les colonnes de $A^\top$).

— Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$(x|y) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Il permet de généraliser la notion d'orthogonalité usuelle. On remarque que $(x|y) = x^\top y = y^\top x$.

Exercice 1 *Découpages, quelques matrices particulières...*

1. Soit A une matrice (n,m), montrer que $A^j = Ae^j$ et que $A_i = (e^i)^\top A$ (rmq : ici e^j est le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et e^i le i ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
2. Soient A une matrice (n,m) et B une matrice (m,p). Montrer que $(AB)_i = A_i B$ et que $(AB)^j = AB^j$.
3. Montrer que le calcul de l'inverse d'une matrice A (n,n) revient à résoudre n systèmes linéaires de même matrice. Aide : poser $AA^{-1} = I$, utiliser un découpage par blocs suivant les colonnes, ce qui donne sur I : $I = (e^1|e^2|\dots|e^n)$.
4. Soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, on définit $A = xy^\top$. Quelles sont les dimensions de A ? Déterminer $KerA$ et ImA.
5. Soit $z \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $M = I + z(e^k)^\top$ (e^k étant le k ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) puis on applique cette matrice sur une matrice A de taille (n,m). Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ on a $(MA)_i = A_i + z_i A_k$. Ainsi chaque ligne i de la nouvelle matrice est égale à la ligne i de A plus la ligne k de A multipliée par le coefficient z_i.

Exercice 2 *Compléments au cours pour les matrices triangulaires*

1. Soient A et B deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures), montrer que la matrice AB est triangulaire inférieure (resp. supérieure) et que $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.
2. Soit T une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) :
   (a) Calculer le déterminant de T ;
   (b) Quelles sont les valeurs propres de T ?
   (c) On suppose T inversible, montrer que T^{-1} est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) et que $(T^{-1})_{ii} = 1/t_{ii}$.

Exercice 3 *Méthode de Gauss-LU à la main !*

Résoudre le système linéaire $Ax = b$ par la méthode de Gauss (sans échange de lignes) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

On mettra bien en évidence les 3 matrices d'élimination successives $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ et $M^{(3)}$ et leurs inverses $L^{(k)}$. On rappelle qu'à l'étape k on a $A^{(k)} = M^{(k)}A^{(k-1)}$ et de même $b^{(k)} = M^{(k)}b^{(k-1)}$ avec :

$$M^{(k)} = I - z^{(k)}(e^k)^\top, \quad L^{(k)} = I + z^{(k)}(e^k)^\top$$

où le vecteur $z^{(k)}$ contient les coefficients permettant à l'étape k d'éliminer la variable x_k des équations $k+1, \dots, n$.

Pour être proche des algorithmes effectivement utilisés, on remarquera qu'on peut enregistrer au fur et à mesure ces coefficients à la place des zéros obtenus, ce qui permet d'obtenir la matrice L de la factorisation LU de la matrice A sans calculs supplémentaires.

Dans un second temps vérifier que le vecteur $b^{(3)}$ (obtenu suite aux 3 étapes d'élimination de Gauss) est bien égal à la solution y du système linéaire $Ly = b$.

Exercice 4 *Unicité de la factorisation $A = LU$*

Soit A une matrice inversible qui admet une factorisation $A = LU$ (c'est à dire L est triangulaire inférieure à diagonale unité (tous les éléments diagonaux sont égaux à 1) et U est une matrice triangulaire supérieure. Démontrer l'unicité de la factorisation (aide : on suppose donc qu'il existe une autre factorisation $A = \tilde{L}\tilde{U}$ puis on montre que $\tilde{L} = L$ et $\tilde{U} = U$; pour cela on utilisera les résultats de l'exercice précédent sur les matrices triangulaires.).

Exercice 5 *Compte d'opérations*

1. écrire un algorithme effectuant la factorisation $A = LU$ en place (cf cours) et calculer le nombre d'opérations (la complexité de cet algorithme) en fonction de l'ordre n de la matrice.
2. étant donné une factorisation “en place” écrire l'algorithme de “descente remontée” permettant de résoudre un système linéaire $Ax = b$. De même calculer le nombre d'opérations.

Exercice 6 *Importance du pivotage dans la méthode de Gauss*

Montrer sur l'exemple ci-dessous que la méthode de Gauss sans pivotage donne des résultats catastrophiques si l'on considère une machine hypothétique travaillant avec l' ensemble de flottants $\mathbb{F}(10, 4, ., .)$ et une arithmétique de type IEEE (c-a-d que si u et v sont 2 flottants alors $u \odot v = fl(u \cdot v)$, tant que l'on ne rencontre pas d'*overflow* ou d'*underflow*, $\cdot$ désignant l'une des 4 opérations et $\odot$ l'opération machine correspondante).

$$\begin{cases} 5 \cdot 10^{-5} x + y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

Remarque : cet exemple explique pourquoi la factorisation standard est $PA = LU$ et non $A = LU$; la factorisation $PA = LU$ est obtenue en cherchant à chaque étape d'élimination le pivot le plus grand en valeur absolue. Une étape s'écrit alors matriciellement :

$$A^{(k)} = M^{(k)} P^{(k)} A^{(k-1)}$$

où $P^{(k)}$ est une matrice de permutation élémentaire (c-a-d une permuation qui n'échange que 2 éléments, ici k avec $i \geq k$ où i est l'indice du pivot choisi). On a vu dans le cours que si A est inversible alors une telle factorisation existe toujours. Son utilisation pour résoudre un système linéaire est toujours simple : on procède comme avec une factorisation $A = LU$ mais en l'appliquant sur le second membre $b' = Pb$.

Exercice 7 *factorisation de Cholesky (d'après partiel 2012)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive.

1. Montrer qu'une telle matrice est nécessairement inversible (aide : montrer que son noyau ne contient que le vecteur nul $KerA = \{0\}$).
2. On admettra qu'une telle matrice admet une factorisation dite de Cholesky de la forme $A = CC^\top$ où C est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous strictement positifs ($C_{i,i} > 0$). Le but de cette question est d'écrire un algorithme pour calculer C.
   (a) En utilisant la formule du produit matriciel et en exploitant la forme triangulaire inférieure de C ($C_{i,j} = 0$ pour $j > i$) montrer que :
   $$A_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} C_{i,k} C_{j,k} \tag{1}$$
   (b) Spécifier la formule obtenue pour $i = 1$ et $j = 1$ et en déduire la valeur de $C_{1,1}$.
   (c) Montrer qu'une fois $C_{1,1}$ connu on peut en déduire $C_{i,1}$ pour $i = 2, \ldots, n$.
   (d) Déduire de (1) que :
   $$A_{j,j} = \sum_{k=1}^{j-1} C_{j,k}^2 + C_{j,j}^2, \text{ et pour } i > j, \quad A_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-1} C_{i,k} C_{j,k} + C_{i,j} C_{j,j}.$$
   (e) Déduire du résultat précédent qu'on peut obtenir C en utilisant un algorithme qui calcule successivement les colonnes de C (première colonne, puis seconde, etc...) chaque colonne j étant calculée en commençant par le coefficient diagonal $C_{j,j}$ puis les autres. Aide : il suffit de montrer que les autres coefficients de C dont on a besoin pour obtenir $C_{j,j}$ puis $C_{i,j}$ pour $i > j$ ont déjà été calculés.
   (f) Ecrire l'algorithme correspondant.
   (g) Comment résoudre un système linéaire $Ax = b$ lorsqu'on connaît la factorisation de Cholesky de A ?