1 Definition d'un developpement limité en un point

On considère une fonction f définie près d'un point a, c'est à dire sur une partie D de R qui contient un ensemble du type]a-r;a[U]a ; a+r[avec r>0 (L'ensemble ne contient pas necessairement le point a).

Soit $n \in N$ On dit que f admet un developpement limité d'ordre n en a (en abrégé un dl n en a) si et seulement si il existe n+1 réels $a_0, a_1, ...a_n$ et une fonction ε définie sur D avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Tel que $\forall x \in D f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ...a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x)$

La fonction polynome $x \to \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ est appelée la partie régulière du dl notée Reg_{nf}.

La fonction : $x \to (x-a)^n\varepsilon(x)$ est dite négligeable devient la fonction $x \to (x-a)^n$ et nous utiliserons la notation de Landau. $O_a((x-a)^n)$ pour la désigner.

1.1 Rappel

$f = O_a(g)$ si et seulement si il existe une fonction h définie sur un voisinage D de a tq :

- $f(x) = g(x)h(x) \forall x \in D$
- $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 0$

1.2 Propriétés

- Si f admet dl n en a alors f possède une limite en a qui vaut a_0 et lorsque $a \in D$ alors $a_0 = f(a)$
- Si f possède un dl n en a, alors il est unique
- Si f possède un dl n en a, alors pour tout $p \in [1; n]$ f possède un dl p en a et $\mathrm{Reg_p}$ f est obtenue en ne gardant que les termes $\mathrm{Reg_n}$f de degré plus petits que p.
- Si f est la fonction polynômiale de degré n : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^n$. Alors elle admet un dl n en a et $\mathrm{Reg_n}$f=f
- Si $a = 0$ et si f possède un parité, alors $\mathrm{Reg_n}$f possède la même parité.
- La fonction f admet un dl n en a si et seulement si la fonction g définie près de 0 par $g(h) = f(a+h)$ admet un dl n en 0 et $\mathrm{Reg_n}$ $g(h) = Reg_n f(a+h)$

2 Opérations algébriques et développement limités

2.1 Notation

Soit p , on notera $\mathrm{Tronc_n}$(p) ce qui reste de p lorsqu'on oublie tous les termes de degré strictement supérieur à n.

Ex

$P(x) = 1 + 2 + 3x^2 - x^3 + x^4$

$Tronc_2(p) = 1 + 2x + 3x^2$

2.2 Proposition

Soient f et g deux fonctions définies près de a admettant chacune un dl n en a.

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$

$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Alors, la fonction $f+g$ admet un dl n en a et $Reg_n(f+g) = Reg_n(f) + Reg_n(g)$

$(f+g)(n) = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Si $\lambda \in R$ la fonction λf admet un dl n en a et $Reg_n(\lambda f) = \lambda Reg_n(f)$

$(\lambda f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$

La fonction $f \cdot g$ admet un dl n en a et $Reg_n(f \cdot g) = Tronc_n(Reg_n(f) \cdot Reg_n(g))$

2.3 Exemple

Si

- $f(x) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$
- $g(x) = 2 + x - x^2 + o(x^2)$

$f(x)g(x) = (1+x+2x^2+o(x^2))(2+x-x^2+o(x^2)) = 2+x-x^2+Zx+x^2+4x^2+o(x^2) = 2+3x+4x^2+o(x^2)$

$f(x) = 1 + x + o(x^2)$

3 Composition des fonctions et développements limités

Proposition

Soit f une fonction définie près de a sur un domaine I à valeurs dans J et admettant en a un dl n.

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Soit g une fonction définie sur J contenant un intervalle non vide de la forme $]a_0 - r; a_0 + r[$ admettent un dl n en a_0.

Alors la fonction composée $g \circ f$ admet un dl n en a et $Reg_n(g \circ f) = Tronc_n(Reg_n(g) \circ Reg_n(f))$

4 Quelques remarques sur les opération sur les dl

1. Dans toutes les opérations sur les fonctions, les dl des fonctions f et g seront pris **au même** ordre. Si on a un dl de f à l'ordre 3 et un dl de g à l'ordre 2, on ne pourra obtenir au mieux qu'un développement limité à l'ordre 2 de f+g ou $f \cdot g$.
2. Un dl est une égalité à condition d'écrire le reste: $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
3. En pratique pour obtenir un dl n en a, on posera $x = a + h$ et on cherchera un dl n en 0 de la fonction $h \to f(a+h)$. Pour la plupart des fonctions classiques, on a une formule simple permettant de ramener f(a+h) à des fonction usuelles de la variable h.

4.1 Quelques exemples

- $e^{a+h} = e^a \cdot e^h$
- $ln(a+h) = ln(a(1+\frac{h}{a})) = ln(a) + ln(1+\frac{h}{a})$
- $\sqrt{a+h} = \sqrt{a}\sqrt{a+\frac{h}{a}}$
- $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$

5 Primitivation et dl

Soit f définie sur un intervalle I contenant le point a et admettant sur I des primitives.

Supposons que f admet un dl n en a s'écrivant :

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Alors toute primitive F de f admet un dl **n+1** en a donné par

$F(x) = F(a) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$

6 Formule de Taylor-Young

Soit $n \in N^*$ et soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I, alors la fonction f admet un dl n en a donné par :

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{f!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

7 Developpements limités en 0 des fonctions usuelles

- $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - ... + x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^m = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{m(m-1)..(m-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + ... + \frac{m(m-1)..(m-k+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Pour m=1/2 on obtient le dl n en a de $\sqrt{1+x}$.

- $ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- $sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + o(x^{2n+1})$
- $cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

- $sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + o(x^{2n+1})$
- $- \ cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $th(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$