Exercices

February 4, 2015

1 Exercice 1

$x(n) = \sin(\omega_0 n)$

Un signal à temps discret x(n) est périodique si et seulement si :

$\exists N \in Z$ tq $\forall n \in Z x(n+N) = x(n)$
$\leftrightarrow sin(\omega_0(n+N)) = sin(\omega_0 \cdot n)$
$\leftrightarrow \omega_0(n+N) = \omega_0 \cdot n + 2k\pi, k \in Z$
$\leftrightarrow \omega_0 \cdot n + \omega_0 \cdot N = \omega_0 \cdot n + 2k\pi$
$\leftrightarrow \omega_0 = \frac{2k\pi}{N}$ avec $k \in Z et N \in Z$
$\leftrightarrow 2\pi f_0 = \frac{2k\pi}{N}$
$\leftrightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{k}{N}$
$\rightarrow$ f_0 doit être une quotient de deux nombrzs entiers $\rightarrow f_0 \in Q$ ensemble des nombres rationnels $\leftrightarrow T_0 \in Q$

2 Exercice 2

2.1 a

De la forme : $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-\tau)$ avec $x(t) = e^{-at} = x(\tau)$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\delta(t-\tau)dt = e^{-a\tau}$

2.2 b

$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-at}\delta(t-\tau)dt = x(\tau) = \tau e^{-a\tau}$

2.3 c

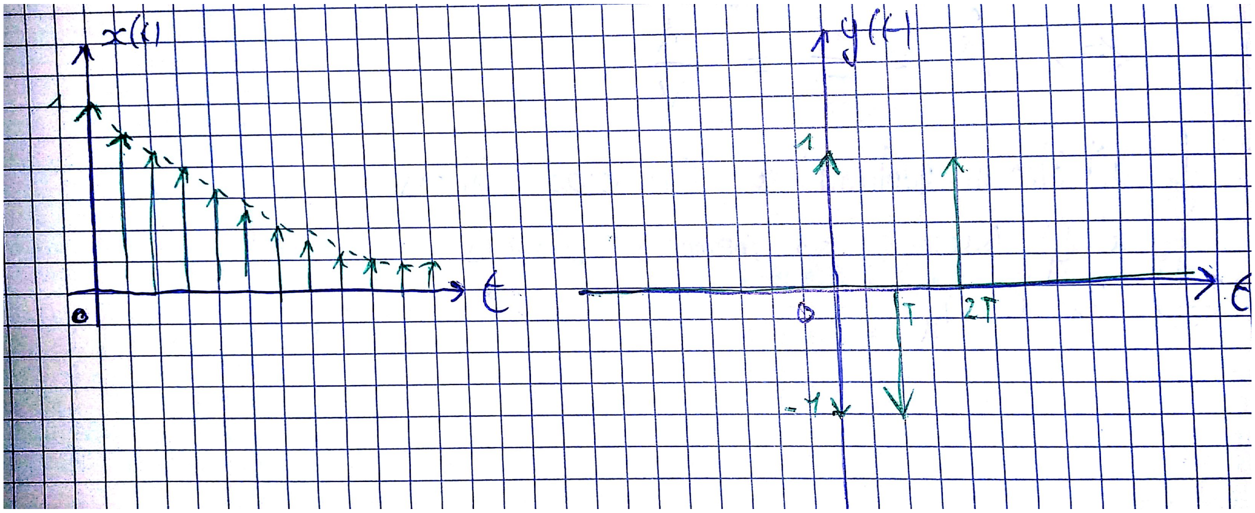
$\int_0^T cos(\omega_0 \cdot t)\delta(t-2T)dt = 0$ car $\delta(t-2T)$ est nulle sur [0,T] $\delta(t-2T \neq 0$ uniquement pour $t = 2T$

3 Exercice 3

$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\delta(t-nT)$

$y(t) = \delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T)$

$g(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\delta(t-kT)$



Comme les signaux x(t) et y(t) sont des impulsions, leur produit de convolution est également une série d'impulsion. Il reste à déterminer C_k.

$g(t) = x(t) * y(t) = x(t) * [\delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T)]$
$= x(t) * \delta(t) - x(t) * \delta(t-T) + x(t) * \delta(t-2T)$
$= x(t) - x(t-T) + x(t-2T)$

Avec $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta(t-nT)$

$x(t-T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta(t-T-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta(t-(n+1)T)$

En posant n'=n+1 donc n=n'-1

Donc $\sum_{n'=1}^{\infty} e^{-n'+1}\delta(t-n'T)$

$x(t-2T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta(t-2T-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta(t-(n+2)T) = \sum_{n'=2}^{\infty} e^{-n'+2}\delta(t-n'T)$

$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta(t-nT) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+1}\delta(t-nT) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n+2}\delta(t-nT) = e^{0}\delta(t) + e^{-1}\delta(t-T) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n}\delta(t-nT) - e^{0}\delta(t-T) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+1}\delta(t-nT) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n+2}\delta(t-nT)$

$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\delta(t-nT) = \delta(t) + (e^{-1}-1)\delta(t-T) + \sum_{n=2}^{\infty}(e^{-n} - e^{-n+1} + e^{-n+2})\delta(t-nT)$

=> * C_0 = 1 * $C_1 = e^{-1} - 1$ * n $\geq$ 2, $C_n = e^{-n} - e^{-n+1} + e^{-n+2}$ * $C_2 = e^{-2} - e^{-1} + e^{0} = 0.77$ * $C_3 = e^{-3} - e^{-2} + e^{-1} = 0.28$ * $C_4 = e^{-4} - e^{-3} + e^{-2} = 0.1$

4 Exercice 4

$$\begin{cases} x(n) = \{3,0,2,1\} \\ y(n) = \{4,5,2,0,1\} \end{cases}$$

$x(k) + y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x = (n)y(k-n)$

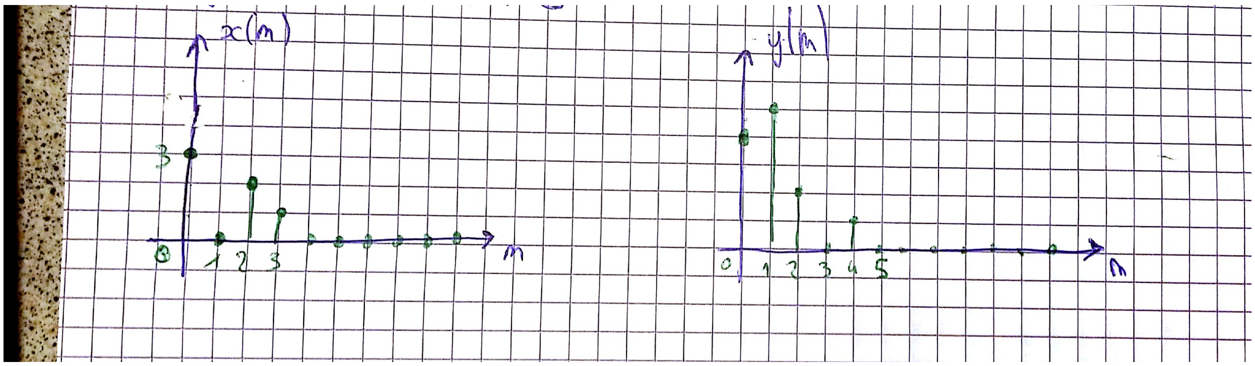
Le nombre prévisible de valeurs non nulles du produit de convolution est égale à la somme des longueurs de signaux -1. Ici : 4+5-1 = 8 valeurs non nulles du produit de convolution => $k \in [0;7]$

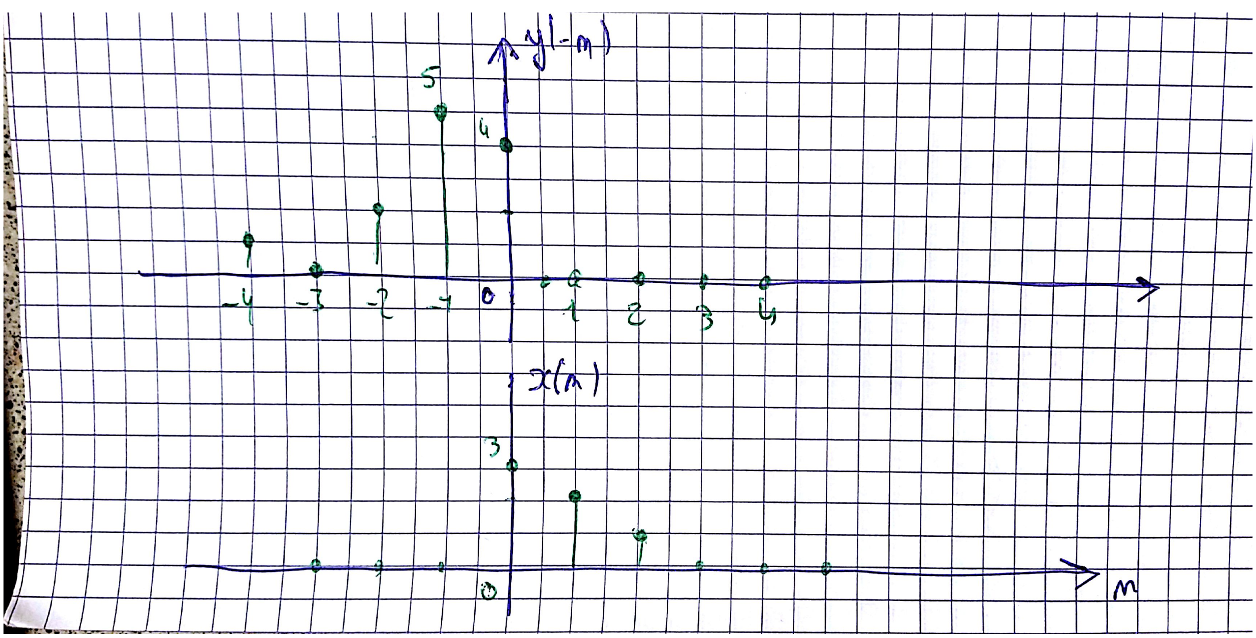
$k = 0, g(0) = x(0) * y(0) = \sum_{n=-\infty}^{100} x(n) \cdot y(-n) = x(0) \cdot y(0) = 3 * 4 = 12$

$k = 1, g(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(1-n) = x(0)y(1) + x(1)y(0) = 5 * 3 + 0 * 4 = 15$

$k = 2, g(2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(2-n) = x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) = 3 * 2 + 0 * 5 + 2 * 4 = 14$

$k = 3, g(3) = 14$


x(n)
3
0
1 2 3
n
y(n)
0
1 2 3 4 5
n


y(-n)
5
4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
x(n)
3
0
n

$k = 4, g(4) = 12$

$k = 5, g(5) = x(1)y(4) + x(2)y(3) + x(3)y(2) = 2$

$k = 6, g(6) = x(2)y(4) + x(3)y(3) = 2$

$k = 7, g(7) = x(3)y(4) = 1x1 = 1$

g(k)={12,15,14,14,12,2,2,1}

x(n)	0	0	0	0	3	0	2	1	
y(-n)	1	0	2	5	4	0	0	0	3x4=12=g(0)
y(1-n)	0	1	0	2	5	4	0	0	3x5+4x0=15=g(1)
	0	0	1	0	2	5	4	0	3x2+'x2=14=g(2)
	0	0	0	1	0	2	5	4	5x2+4x1=14=g(3)

5 Exercice 5 : Séries de Fourier

$x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}) + b_n \cdot \sin(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T})\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$

On pose $\Theta = \frac{2\pi t}{T}$

$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j\Theta n} = \sum_{-\infty}^{-1} C_n e^{j\Theta n} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{j\Theta n}$
$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-j\Theta n} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{j\Theta n}$
$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{-n} e^{-j\Theta n} + C_n e^{j\Theta n}\right)$
$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{-n}(cos(\Theta n) - j\sin(\Theta n)) + C_n(cos(\Theta n) + j\sin(\Theta n)))$
$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((C_n + C_{-n})cos(\Theta n) + j(C_n - C_{-n})sin(\Theta n))$

$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$
$e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j\sin\alpha$

$==> a_0 = C_0$
$a_n = C_n + C_{-n}$
$b_n = j(C_n - C_{-n})$
$\Leftrightarrow jb_n = j^2(C_n - C_{-n}) = -C_n + C_{-n}$
$\Rightarrow a_n - jb_n = 2C_n$
$\Rightarrow \boxed{C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)}$

$a_n + jb_n = 2C_{-n}$
$\Rightarrow \boxed{C_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n})}$ quand $n < 0$

6 Exercice 6 : Séries de Fourier Bis

$x(t) = \sin(\omega_0 t)$

On cherche C_n tq $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$ ici a période de $x(t)$ est $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Formule d'Euler du sin :

$sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$
$= \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2j}$
$= \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{T}t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$

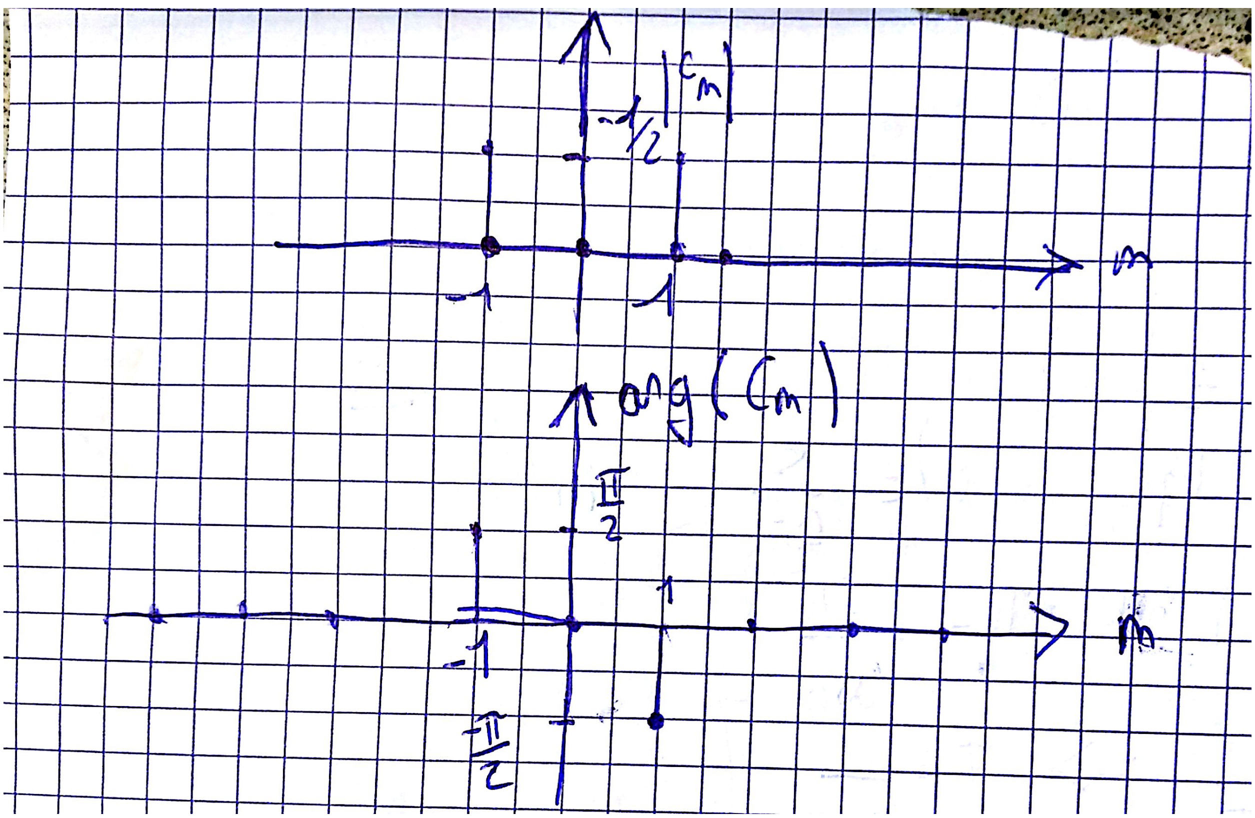
Or $\sin(\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ (Dév en série de Fourier complexe de $sin(\omega_0 t)$)

Par identification on a :

$C_1 = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$C_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{j}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$

et $C_n = 0$ pour $n \neq 1$ et -1



7 Exercice 7 : Séries de Fourier ter

$x(t) = 2sin(\omega_0 t) \cdot sin(\varphi) + cos(\omega_0 t + \varphi)$

La période est $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

On cherche $\mathrm{C_n}$ tq $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_0 nt}$

On sait que $cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$x(t) = 2\sin(\omega_0 t)\sin\varphi + \cos(\omega_0 t)\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\sin\varphi$
$= \sin(\omega_0 t)\sin\varphi + \cos(\omega_0 t)\cos\varphi$
$= \cos(\omega_0 t - \varphi)$

$\cos(\omega_0 t - \varphi) = \frac{e^{j(\omega_0 - \varphi)} + e^{\omega_0 t - \varphi)}}{2}$
$= \frac{1}{2}$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_0 nt}$

$n = -1, C_{-1} = \frac{1}{2}e^{j\varphi}$
$n = 1, C_1 = \frac{1}{2}e^{-j\varphi}$

8 Exercice 8

$w(t) = \lambda + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\lambda\pi)cos(nt)}{n}$

On cherche a_n et b_n tq :

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n sin(\frac{2\pi nt}{T})$

$x(t)$ est pair : $b_n=0$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} 1dt = \frac{1}{2\pi}[t]_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} = \frac{1}{2\pi}(\lambda\pi - (-\lambda\pi)) = \frac{2\lambda\pi}{2\pi} = \lambda$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)cos(\frac{2\pi nt}{T})dt$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(nt)}{n}\right]_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}$
$= \frac{1}{n\pi}[sin(n\lambda\pi) - sin(-n\lambda\pi)]$

$$sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$$

$= \frac{2}{n\pi}sin(n\lambda\pi)$

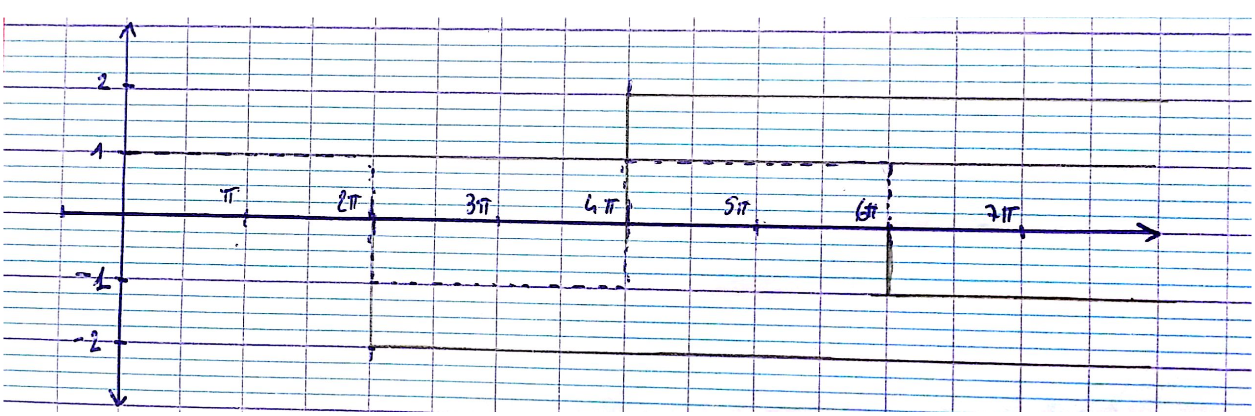
$\Rightarrow x(t) = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}sin(n\lambda\pi)cos(nt)$

9 Exercice 9

$x(t) = 1(t) - 2 \cdot 1(t-2\pi) + 2 \cdot 1(t-4\pi) - 1(t-6\pi)$

Rappel : $1(t)$ échelon :

$$\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t < 2\pi \\ -1 \text{ si } 2\pi \leq t < 4\pi \\ 1 \text{ si } 4\pi \leq t < 6\pi \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$\rightarrow$ On "périodise" le signal x(t) avec une période 6π

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + b_n sin(\frac{2\pi n}{T}t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})$

mais x(t) est pair $\Rightarrow b_n = 0$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{6\pi}\int_0^{6\pi} x(t)dt$
$= \frac{1}{6\pi}\left[\int_0^{2\pi} 1dt - \int_{2\pi}^{4\pi} 1dt + \int_{4\pi}^{6\pi} 1dt\right]$
$= \frac{1}{6\pi}[2\pi - 2\pi + 2\pi] = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)cos(\frac{2\pi nt}{T})dt = \frac{2}{6\pi}\int_0^{6\pi} x(t)cos(\frac{2\pi nt}{6\pi})dt$

$a_n = \frac{1}{3\pi}\left[\int_0^{2\pi} cos(\frac{nt}{3})dt - \int_{2\pi}^{4\pi} cos(\frac{nt}{3})dt + \int_{4\pi}^{6\pi} cos(\frac{nt}{3})dt\right]$
$= \frac{1}{3\pi}\left(\left[\frac{sin(\frac{nt}{3})}{\frac{n}{3}}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{sin(\frac{nt}{3})}{\frac{n}{3}}\right]_{2\pi}^{4\pi} + \left[\frac{sin(\frac{nt}{3})}{\frac{n}{3}}\right]_{4\pi}^{6\pi}\right)$
$= \frac{3}{n}\frac{1}{3\pi}\left(sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{4\pi n}{3}) + sin(\frac{2\pi n}{3}) + sin(\frac{6\pi n}{3}) - sin(\frac{4\pi n}{3})\right)$
$= \frac{2}{n\pi}\left(sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{4\pi n}{3})\right) = \frac{-2}{n\pi}\left(2\sin\frac{\pi n}{3}\cos\pi n\right)$
$= \frac{4}{n\pi}(-1)(-1)^n \sin\frac{\pi n}{3} = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi n}{3}$

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{2\pi nt}{T} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{\pi n}{3}\cos\frac{nt}{3}))$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
$p = \frac{2\pi n}{3}$
$q = \frac{4\pi n}{3}$

$\Rightarrow \frac{p+q}{2} = \frac{\frac{2\pi n}{3} + \frac{4\pi n}{3}}{2} = \pi n$
$\frac{p-q}{2} = \frac{\frac{2\pi n}{3} - \frac{4\pi n}{3}}{2} = \frac{2\pi n}{6} = -\frac{\pi n}{3}$

10 TD machine Exercice 3 a)

- Signal à temps continu périodique de période 2π
- Signal impair

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(\frac{2\pi nt}{T})$

Avec $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sin(\frac{2\pi nt}{T})dt$ avec T=2π

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)sin(nt)dt$
$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin(nt)dt - \int_{\pi}^{2\pi}\sin(nt)dt\right]$
$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$
$= \frac{1}{\pi}\left[(-\frac{1}{n}cos(n\pi) + \frac{1}{n}cos(0)) - (-\frac{1}{n}cos(2\pi n) + \frac{1}{n}cos(\pi n))\right]$

$= \frac{1}{pi}\left(-\frac{1}{n}cos(n\pi) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}cos(\pi n)\right)$
$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}(1 - cos(n\pi)\right)$
$= \frac{2}{n\pi}(1 - cos(n\pi))$
$=$

$$\begin{cases} 0 \text{ si n est pair} \\ \frac{4}{n\pi} \text{ si n est impair} \end{cases}$$

$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(nt)$
$= \frac{4}{\pi} \sum_{n-1}^{\infty} \frac{sin((2n-1)t)}{2n-1}$

11 Exercice 11

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})$

$x(t)$ est impair

$\Rightarrow a_n = 0$

$b_n = \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) sin(\frac{2\pi nt}{T}) dt$

Sur l'intervalle $[-\frac{-T}{2}; \frac{T}{2}], x(t) = \frac{2}{T} t$

$b_n = \frac{4}{T^2} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin(\frac{2\pi nt}{T}) dt$

$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int uv'$

$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$u'(t) = \sin \frac{2\pi nt}{T}$	$u(t) = \frac{-T}{2\pi n} \cos(\frac{2\pi nt}{T})$

$b_n = \frac{4}{T^2} \left[\left[-\frac{T}{2\pi n} t \cos(\frac{2\pi nt}{T}) \right]_{-T/2}^{T/2} - \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\frac{T}{2\pi n} \cos(\frac{2\pi nt}{T}) dt \right]$
$= -\frac{2}{T\pi n} \left(\frac{T}{2} \cos(-\pi n) + \frac{T}{2} \cos(\pi n) - \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2\pi nt}{T}) dt \right)$
$= \frac{2}{\pi n T} \left(-T \cos(\pi n) + \frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi n} \sin(-\pi n) \right)$
$= \frac{2}{\pi n} \left(-\cos(\pi n) + \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n) \right)$
$= \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi n}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(\frac{2\pi nt}{T})$

11.1 Rappels

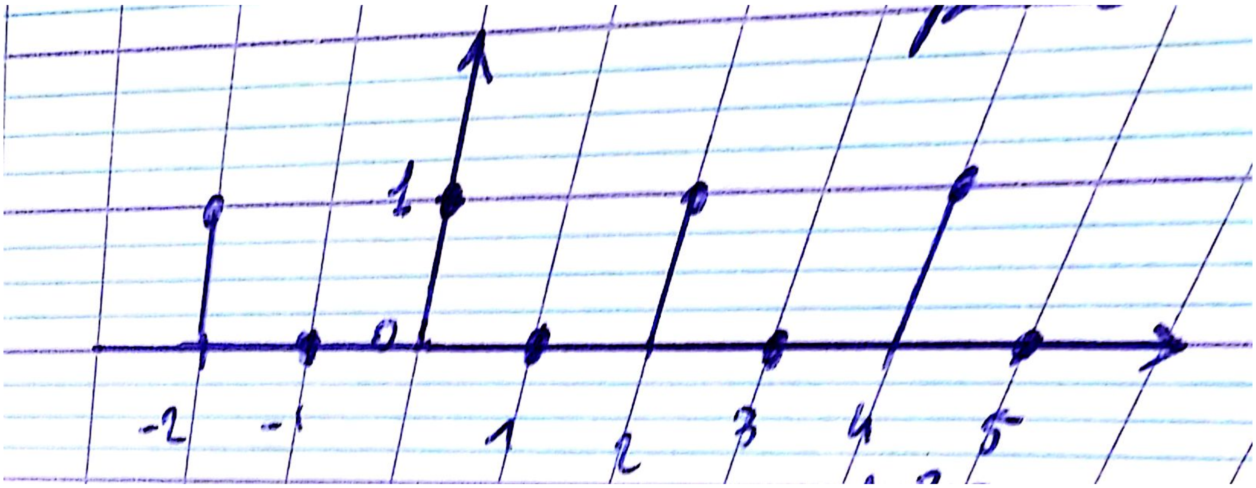
- Signal x(t) périodique $\Rightarrow$ spectre de raies (discret)
- Signal x(k) discret périodique $\Rightarrow$ Spectre de raies (discret) périodique

12 Exercice 12

$x(n) =$

$$\begin{cases} 0 \text{ si n impair} \\ 1 \text{ si n pair} \end{cases}$$

Période K = 2

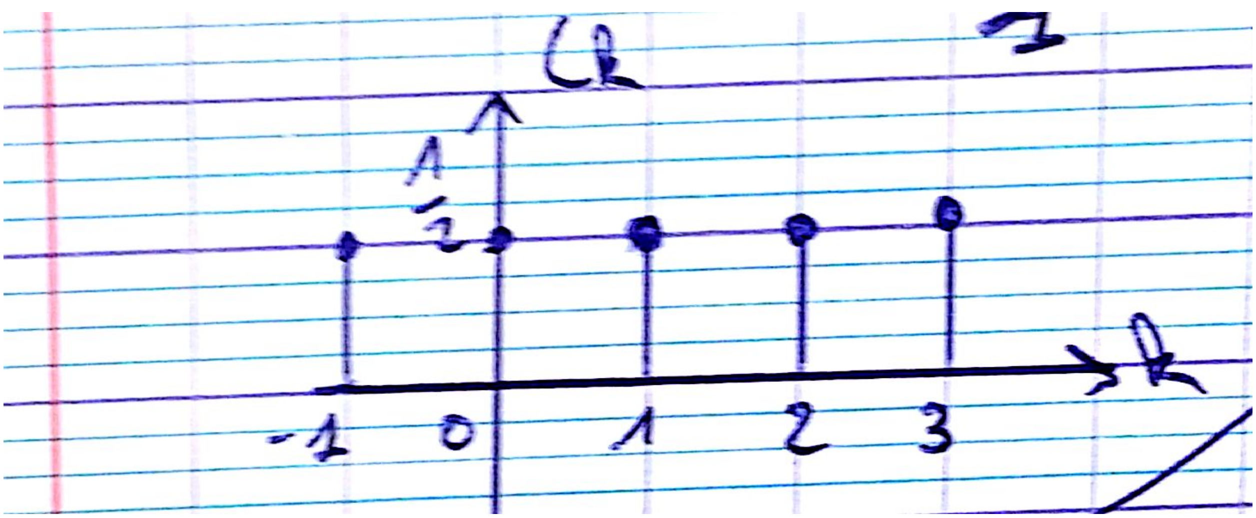


$x(n) = \sum_{k=<K>} C_k e^{jk\frac{2n\pi}{K}}$ avec $C_k = \frac{1}{2}\sum_{n=<K>} x(n)e^{-j\frac{j2\pi n}{K}}$
$= \sum_{k=0}^{1} C_k e^{k\frac{2n\pi}{2}}$ avec $C_k = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi n}{2}}$

$C_{k+K} = C_{k+2} = C_k \rightarrow$ le spectre est périodique de période K

$k = 0, C_0 = \frac{1}{2}\left(x(0)e^{-j0\pi 0} + x(1)e^{-j0\pi 1}\right)$
$= \frac{1}{2}(x(0) + x(1)) = \frac{1}{2}$

$k = 1, C_1 = \frac{1}{2}\left(x(0)e^{-j1\pi 0} + x(1)e^{-j1\pi 1}\right)$
$= \frac{1}{2}(x(0) - x(1)) = \frac{1}{2}$



$\Rightarrow x(n) = C_0 + C_1 e^{jn\pi} = \frac{1}{2}(1 + e^{jn\pi})$

Développement en série de Fourier de x(n)

$e^{jn\pi} =$

$$\begin{cases} 0 \text{ si n impair} \\ 1 \text{ si n pair} \end{cases}$$

$x(n) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-1) = 0 \text{ si n impair} \\ \frac{1}{2}(1+1) = 1 \text{ si n pair} \end{cases}$$

$\rightarrow$ On retrouve bien la def de x(n)

13 Exercice 13

13.1 a

Energie de $x(t) = e^{-t} \cdot 1(t) =$

$$\begin{cases} 0 \text{ si t<0} \\ e^{-t} \text{ si t} \geq 0 \end{cases}$$

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

/!\ si x(t) est complexe |x(t)| = module de x(t)

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t} \cdot 1(t))^2 dt$
$= \int_0^{\infty} (e^{-t})^2 dt$
$= \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{\infty}$
$= -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$

13.2 b

$y(t) = 1(t) - 1(t-\tau), \tau > 0$

$y(t) =$

$$\begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq < \tau \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_0^{\tau} 1 dt = [t]_0^{\tau} = \tau$

13.3 c

Puissance de $z(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j\frac{2\pi}{T}t}$

z(t) est périodique $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Cas général non périodique $= P_z = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |z(t)|^2 dt$

Cas signal périodique : $P_z = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |z(t)^2 dt$

Relation de Perceval :

$P_z = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |z(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Cn|^2$

Si $z(t) = e^{j\omega_0 t}$ les coefficients de Fourier complexes sont :

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_n = 0, n \neq 1 \end{cases}$$

donc $P_z = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = 1$

Dev. en série de Fourier de z(t)

$z(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} C_n = 1 \text{ pour n=1} \\ C_n = 0 \text{ pour } n \neq 1 \end{cases}$$

---

14 Exercice 14

14.1 a

Energie d'un signal à temps discret :

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2}$$

$E_x = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a^n 1(n)|^2$
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a^n|^2$
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a^2)^n$ De la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1 = \frac{1}{1-\alpha}$
$= \frac{1}{1-a^2}$

14.2 b

16 Exercice 16

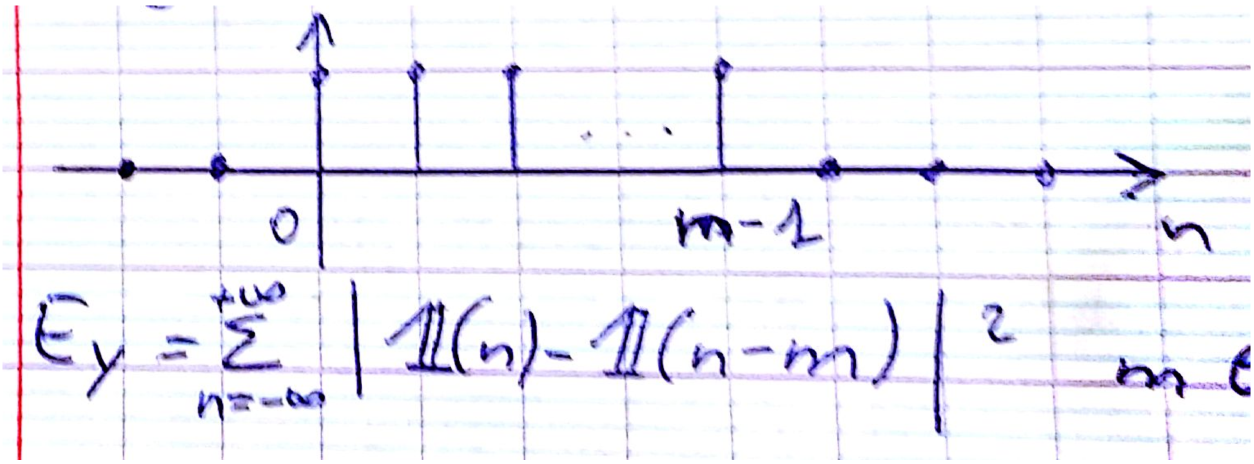
$z(t) = x(t) \cdot y(t)$

16.1

$y(t) = e^{j\omega_n t}$ Montrer que : $Z(\omega) = X(\omega - \omega_m)$

$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt$ or $z(t) = x(t) e^{j\omega_m t}$

$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_m t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_m)t} dt = X(\omega - \omega_m)$



16.2

$z(t) \cdot e^{-j\omega_n t} = x(t)e^{j\omega_m t}e^{-j\omega_m t} = x(t)$

19 Exercice 19

19.1

$s(t) = cos(2\pi f_0 t)[1(t + \frac{\tau}{2}) - 1(t - \frac{\tau}{2})]$ avec τ réel et positif

Calculer (f), la TF de $s(t)$

$$s(t) = \begin{cases} cos(2\pi f_0 t) \text{ si } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

= Multiplication entre un cosinus et une fonction porte (ou rectangulaire)

$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft}dt$

Or $cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

$S(f) = \frac{1}{2}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})e^{-j2\pi ft}dt$

On sait que $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$S(f) = \frac{1}{2}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}dt = \frac{1}{2}[\frac{e^{-j2\pi(f-f_0)t}}{-j2\pi(f-f_0)}]_{-\tau/2}^{\tau/2} + \frac{1}{2}[\frac{e^{-j2\pi(f+f_0)t}}{-j2\pi(f+f_0)}]_{-\tau/2}^{\tau/2} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-j2\pi(f-f0)\frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi(f-f_0)\frac{\tau}{2}}}{2j(f-f_0} + \frac{e^{-j2\pi}}{}\right.$

$S(f) = \frac{sin(2\pi(f-f_0)\frac{\tau}{2})}{2\pi(f-f_0)} + \frac{sin(2\pi(f+f_0)\frac{\tau}{2})}{2\pi(f+f_0)} = \frac{\tau}{2}\left(sinc(\pi(f-f_0)\tau) + sinc(\pi)(f+f_0)\tau)\right)$

car : $sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$

19.2

19.2.1

$F[x(t)e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi(f_0 - f)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi(f-f_0)t} = X(f - f_0)$

19.2.2

Rappel formule d'Euler : $cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

$[cos(2\pi f_0 t] = F\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right]$

$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$ (propriété de linéarité de la TF)

$= \frac{1}{2}F[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2}F[e^{-j2\pi f_0 t}]$

D'après a), $x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \Leftrightarrow 1 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$

Car TF du signal constant $= \delta(f)$ et $1 \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f + f_0) \Rightarrow F[cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$

19.2.3

Voir cours

19.2.4

$s(t) = cos(2\pi f_0 t) \cdot \left[1(t + \frac{\tau}{2}) - 1(t - \frac{tau}{2})\right]$

Or $x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$

$S(f) = F\left(cos(2\pi f_0 t)\right) * F\left(1(t + \frac{\tau}{2}) - 1(t - \frac{\tau}{2})\right) = \frac{\tau}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * sinc(f\tau) * \delta(f + f_0)$

Propriété impulsion de Dirac :

$sinc(f\tau) * \delta(f - f_0) = sinc((f - f_0)\tau)$

$sin(f\tau) * \delta(f + f_0) = sinc((f + f_0)\tau)$

Donc :

$S(f) = \frac{\tau}{2}[sinc(f - f_0)\tau + sinc((f + f_0)\tau)]$

A SAVOIR REFAIRE AVEC UN SIN

20 Exercice 20: Dualité et transformée de Fourier

20.1

TF $x(t) = e^{-a|t|}$

$$|t| = \begin{cases} -t \text{ si } t < 0 \\ t \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt$

$\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt = \left[\frac{e^{(a-j2\pi f)t}}{a-j2\pi f}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{(a+j2\pi f)t}}{a+j2\pi f}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$

$e^{a-j2\pi f}t = e^{at}e^{-j2\pi ft}$ Compris entre -1 et 1

20.2

$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-juv}dv$

On pose u = ω (pulsation) v = t (temps)

$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = F(g(t))$

$\rightarrow \boxed{F(g(t))}$

$\omega = 2\pi f$

$\rightarrow$ f est la TF de g. On pose u=t et v=ω

Rappel :

$F(x(t)) = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

$F^{-1}(X(f)) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$

$\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow df = \frac{d\omega}{2\pi}$

$F(x(t)) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

$F^{-1}(X(\omega)) = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-j\omega t}d\omega = 2\pi F^{-1}(g(-\omega))$

$F^{-1}(g(-\omega)) = \frac{1}{2\pi}f(t)$

$\boxed{g(-\omega) = \frac{1}{2\pi}F(f(t))}$

20.3

D'après la question a) avec a=1 :

$F(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+\omega^2} = y(\omega)$

$F(y(t)) = Y(\omega) = 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi g(-\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$

21 Exercice 21

$$x(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } |n| \leq N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}$ ou $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}$

$= \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n}$

Changement de variable : $m = n + N \Leftrightarrow n = m - N$

$X(\omega) = \sum_{m=0}^{N} x(m-N)e^{-j\omega(m-N)} = \sum_{m=0}^{2N} e^{-j\omega(m-N)}$

$X(\omega) = \sum_{m=0}^{2N} e^{-j\omega m} \cdot e^{-j\omega N} = e^{j\omega N} \sum_{m=0}^{2N} e^{-j\omega m}$

Série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{N'-1} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{N'}}{1-a} \text{ si } a \neq 1 \\ N' \text{ si } a = 1 \end{cases}$$

Ici $N' - 1 = 2N \Rightarrow N' = 2N + 1$

$a = e^{-j\omega} \neq 1$ si $\omega \neq 0$

$\Rightarrow X(\omega) = e^{j\omega N} \cdot \frac{1-e^{-j\omega(2N+1)}}{1-e^{-j\omega}}$

Or $a - e^{-j\theta} = e^{-j\theta/2}(e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2})$

$\Rightarrow X(\omega) = e^{j\omega N} \frac{e^{-j\omega(N+1/2)}[e^{j\omega(N+1/2)} - e^{-j\omega(N+1/2)}]}{e^{-j\omega/2}[e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}]}$

$X(\omega) = \frac{e^{j\omega(N+1/2)} - e^{-j\omega(N+1/2)}}{e^{j\omega/2} - e^{j\omega/2}}$ or $sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

Donc $= \frac{sin(\omega(N+1/))}{sin(\omega/2)}$

en $\omega = 0, X(0) = e^{j0N} \cdot \sum_{m=0}^{2N} (1)^m = 2N + 1$

22 Exercice 22

22.1

$x(t) = sin(\omega t), y(t) = 1, \tau = \frac{2\pi}{\omega}$

$\phi_{xy} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} sin(\omega t)dt = \frac{\omega}{2\pi} \cdot [-\frac{-\cos(\omega t)}{\omega}]_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = \frac{-1}{2\pi}[cos(\pi) - cos(-\pi)] = \frac{-1}{2\pi}[-1+1] = 0$

22.2

$x(t) = e^{-a|t|}, y(t) = \delta(t)$

$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)t(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\delta(t+\tau)dt$

or $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt = x(\tau)}$

$\Rightarrow \Phi_{xy}(\tau) = x(-\tau) = e^{-a|-\tau|} = e^{-a|\tau|}$

22.3

$x(t) = e^{-a|t|}, y(t) = \delta(t)$

$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt = x(-\tau) * y(\tau)$

$\Phi_{xy}(\omega) = TF[\phi_{xy}(\tau)] = TF[x(-\tau)] \cdot TF[y(\tau)] = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

Ici $Y(\omega) = 1$ et $X(\omega) = TF(e^{-a|t|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt$

avec

$$|t| = \begin{cases} -t \text{ si } t < 0 \\ t \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = [\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}]_{-\infty}^{0}[\frac{-e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} - 0 - 0 + \frac{1}{a+j\omega}$

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^{at}e^{-j\omega t} = \lim\limits_{t \to -\infty} e^{at} = 0$

Donc $\frac{a+j\omega+a-j\omega}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$\Rightarrow \phi_{xy}(\tau) = TF^{-1}[\frac{2a}{a^2+\omega^2}] = e^{-a|\tau|} = x(\tau)$

23 Exercice 23

23.1

$a - r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt = x^*(-\tau) * y(\tau)$

$TF[r_{xy}(\tau)] = TF[x^*(-\tau) * y(\tau)] = TF[x^*(-\tau)] \cdot TF[y(\tau)] = X^*(\omega) \cdot Y(\omega)$

23.2

D'après la table des transformées :

$X(\omega) = Tsinc(\frac{\omega T}{2\pi})$ avec $sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$

$= T\frac{sin(\frac{\pi\omega T}{2\pi})}{\pi\frac{\omega T}{2\pi}} = \frac{2}{\omega}sin(\frac{\omega T}{2}) = X^*(\omega)$

$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$y(t) = x(t - \frac{T}{2}) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}} = \frac{4}{\omega^2} = sin^2(\frac{\omega T}{2})e^{-j\omega\frac{T}{2}} = T^2sinc^2(\frac{\omega T}{2\pi}) \cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}}$

Or $tri(\frac{t}{T}) \leftarrow Tsinc^2(\frac{\omega T}{2\pi})$

$r_{xy} = T \cdot tri(\frac{\tau - \frac{T}{2}}{T})$

23.3

$r_{xy}(\tau)$ est max pour $\tau = \frac{T}{2}$, qui correspond au retard entre les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$.