Transformée de Fourier

Arthur Garnier

February 4, 2015

1 Justification Heuristique de la TF

- Cas des signaux périodiques ou transitoires : Développement en Série de Fourier

$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2n\pi n f_0 t}$ avec $C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$

où T est la période du signal $f_0 = \frac{1}{T}$.

Dans le spectre de raies $x_T(t)$, la distance entre les raies adjacentes est égales à $f_0 = 1/T$

- Généralisation aux signaux non-périodiques et permanents : $Y \to \infty$

TF : $x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}$ **avec** $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

$\Rightarrow X(f)$ est le spectre de $x(t)$

2 TF d'un signal réel et parité

- Tout signal réel x(t) peut se décomposer en la somme d'un signal pair et d'un impair :

$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

- La TF d'un signal réel est, en général, une fonction complexe (de la variable f) et :
  - $Re(X(f)) = X_p(f)$, la TF de la partie paire de x(t), est une fonction paire
  - $jlm(X(f)) = X_i(f)$, TF de la partie impaire de $x(t)$, est une fonction impaire
  - $|X(f)|$, spectre d'amplitude, est une fonction paire
  - $\arg(X(f))$, spectre de base, est une fonction impaire

Pour être exact, on montre que :

$X(f) = 2\int_0^{\infty} x_p(t)\cos(2\pi ft)dt - 2j\int_0^{\infty} x_i(t)\sin(2\pi ft)dt$

- **La TF d'un signal réel, X(f), est réelle si et seulement si le signal x(t) est pair**

3 Exemple - TF de la fonction porte (signal rectangulaire)

- Soit le signal $x(t) = rect(\frac{t}{T})$, signal rectangulaire, centré sur 0, de durée T
- Montrer que la TF de x(t) est réelle.

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$

avec

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } -\frac{T}{2} \leq \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \left[-\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{sin(\pi fT)}{\pi f}$

$\boxed{\text{Sinus cardinal :} sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}}$

$sinc(0) = 1$

$sinc(x) = 0$ pour $x = k, k \in Z$

4 Propriétés

- Inversion chronologique : $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$ $(= X * (f)$ si $x(t)$ réel)
- Linéarité : $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bYY(f)$
- Translation temporelle : $x(t-\tau) \leftrightarrow X(f) \cdot exp(-j2\pi f\tau)$ (changement de variable $\sigma = t - \tau$)
- Dérivation: $\frac{d^n x}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$
- Intégration : $\int_{-\infty}^{t} x(u)du \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \cdot \delta ...$

5 Existence de la TF

- La TF d'un signal $x(t)$ existe si l'intégrale converge.
- Pour la plupart des signaux physiques, la TF existe :
  - **Tous les signaux continus à E finie possèdent une TF**
- Les signaux continues à P finie, physiquement irréalisables, permettent de modéliser des catégories importantes de signaux (quasi-)permanents.
  - Ils ne satisfojnt pas aux critères usuels de convergence de la TF
  - Mais leur TF peut être calculée en élargissant son champ d'application aux distributions
- Dirac et Constante : $\delta(t) \leftrightarrow 1 et x(t) = C \leftrightarrow = C\delta(f)$ (et $X(\omega) = 2\pi C\delta(\omega)$)
- Par translation : $\delta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau}$ et $e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$
- Echelon :

$$\begin{cases} \delta(f)/2 \text{ si } f = 0 \\ \delta(f)/2 + 1/(j2\pi f) \text{ si } f \neq 0 \end{cases}$$

6 Corrélation et densité spectrale

6.1 Fonction d'intercorrélation et d'autocorrélation

6.1.1 Cas des signaux à énergie finie

$\Rightarrow$ Tous les signaux de cette classe possèdent une TF

- Fonction d'intercorrélation

Les signaux x et y sont orthogonaux (ou non-corrélés) pour chaque valeur de τ où la fonction d'intercorrélation s'annule.
$r_{x_y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt = x^*(\tau) * y(\tau)$
Propriété : $r_{xy}(\tau) = r_{yx}^*(-\tau)$

- Fonction d'autocorrélation (FA)

$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$
Propriétés :

1. $r_x(0) = ||x||^2 = E_x = max_\tau(r_x(\tau))$
2. si x(t) est réel, sa FA est réelle et paire

6.2 Densité spectrale d'énergie

$\Rightarrow$ **La densité spectrale d'énergie** d'un signal est égale à la TF de sa FA

$\Phi_x(f) = TF[r_x(\tau)]$

D'après les résultats précédents, on a :

$\Phi_x(f) = TF[x^*(-\tau) * x(\tau)] = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2$

- Lien avec l'énergie totale du signal

$E_x = r_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)df$

car $r_x(\tau) = TF^{-1}[\Phi_x(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)e^{j2\pi f\tau}df$ et $E_x = r_x(0)$

Rightarrow L'énergie totale du signal peut aussi se calculoer en intégrant sa distributuon fréquentielle (**Identité de Parseval**), qui est donc appelée **densité spectrale d'énergie**.

Propriété : si x(t) est réel, sa FA est réelle et paire ==> donc sa TF l'est également : $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$

6.3 Fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation

6.3.1 Cas des signaux à Puissance finie ($E_x = \infty$)

$\Rightarrow$ Corrélation des signaux à puissance moyenne finie non-nulle

- Fonction d'intercorrélation

$\widetilde{r}_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$

Avec cette déf. les fonction d'inter- et d'autocorrélations possèdes les même propriété que celle avec des puissance finie.

6.4 Densité spectrale de puissance (DSP)

- Densité spectrale de puissance : $\widetilde{\Phi}_x(f) = TF[\widetilde{r}_x(\tau)]$
- Lien avec la puissance totale du signal
  - Pour $\tau = 0$ on obitent :
    * $P_x = \widetilde{r}_x(0) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Phi}_x(f)df$

$\Rightarrow$ La fonction $\widetilde{r}_x(f)$ représente donc bien la distribution fréquentielle de la puissance totrale du signal. Contrairement au cas du spectre, la DSP n'est pas égale au carré du module de la TF du signal. Toutefois on peut établir : ...

7 Transformée de Fourier à temps discret

7.1 Définition :

La TF d'un signal discret $x(k)(k \in Z)$ est définie par :

$X(f) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi kf}$ ou $X(\omega) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}$

7.2 Existence

On admettra que X(f) existe pour tous les signaux **à énergie finie de absolument sommable** :

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$

7.3 Propriété

La TF d'un signal à temps discret est **périodique**, de période 1 :

$X(f+1) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi k(f+1)} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi kf}e^{-j2\pi k} = X(f)$

Et on a $e^{-j2\pi k} = 1$

$\Rightarrow$ Tout intervalle de longueur 1 est suffisant pour décrire X(f). On utilise généralement l'intervalle principal [-1/2,1/2]

- X(f) étant périodique, on peut considérer la déf. précédente comme son Dév. en Série de Fourier
- x(k) correspond alors aux coeff. de ce développement :

7.4 Transformée de Fourier inverse

$x(k) = \frac{1}{F}\int_{-F/2}^{F/2} X(f)e^{j2\pi kf}df$ où F est la période X(f), donc F=1

$= \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi kf}df$

8 Fonction d'inter- et d'autocorrélation

8.1 Fonction d'intercorrélation

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)y(k+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k-n)y(k) = r_{yx}^*(-n)$$

8.2 Fonction d'autocorrélation

$$r_x(n) = r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)x(k+n)$$

On retrouve les propriétés obtenues avec les signaux continus

9 Spectre d'énergie

9.1 Spectre d'énergie d'un signal à temps discret x(k)

$$\Phi_x(f) = TF[r_x(n)] = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2$$

9.2 Remarque

On a donc parallèlement : $r_x(n) = TF^{-1}[\Phi_x(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_x(f)e^{j2\pi nf}df$

9.3 Energie d'un signal à temps discret

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)x(k) = r_x(0) = max_n(r_x(n)) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_x(f)df$$

10 Propriétés de la TF à temps discret

10.1 Translation

$x(k)e^{j2\pi f_0 k} \leftrightarrow X(f - f_0)$

$x(k - k_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f k_0}$

10.2 Convolution

- $x(k) * y(k) \leftrightarrow X(f).Y(f)$ (convolution discrète)
- $x(k).y(k) \leftrightarrow X(f) * Y(f) = \int_I X(f')Y(f - f')df'$ = produit de convolution périodique

En effet, le produit de conv. de signaux périodiques (discrets ou continus) ne converge pas et doit être remplacé par un produit périodique, calculé sur une seule période (les signaux doivent donc avoir la même période)

10.3 Remarque

Dans les applications pratique numérique, cette TF n'est pas directement utilisable car :

- Elle nécessite une infinité de valeurs
- La variable f, continue, n'est pas compatibble avec la nature discrète des syst. numériques

$\Rightarrow$ Version modifiée : La TF Discrète (TFD)

11 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

11.1 Đéfinitions

- Rappel des définitions de la TF à temps discret :

$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi kf}$ et $x(k) = \int_0^1 X(f)e^{j2\pi kf}df$

- On suppose le signal x(k) de durée limitée et on discrétise la fréquence (échantillonage dans le domaine fréq.). Si on considène N points entre 0 et 1, on obtient alors un pas d'échantillonanage $\Delta f = 1/N$ et on a :

$f = \frac{n}{N}$ avec $n = 0, 1, ..., N-1$

- Les deux relations précédentes deviennent :

$X(\frac{n}{N} = X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}}$ et $\hat{x}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j2\pi k\frac{n}{N}}$

- Remarque : $\hat{x}$ est N-périodique
- On montre que $\hat{x}(k) = x(k)$ sur une période si x(k) s'annule à partir de k=N