Dévelopemment en série de Fourier

Arthur Garnier

February 4, 2015

1 Approximation de x(t) par f(t) au sens de la minimisation de l'EQM

Soient x(t) un signal continu sur [t1,t2] en f(t) une fontion continue sur [t1, t2]

On cherche une approximation de x(t) par f(t) sur [t1, t2]

On cherche $C \in R$ tel que x(t) ~~ C.f(t) au sens d'une certaine minimisation.

On choisit la minimisation de **l'erreur quadratique moyenne** (EQM), notée ε :

$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - C \cdot f(t)]^2 dt$

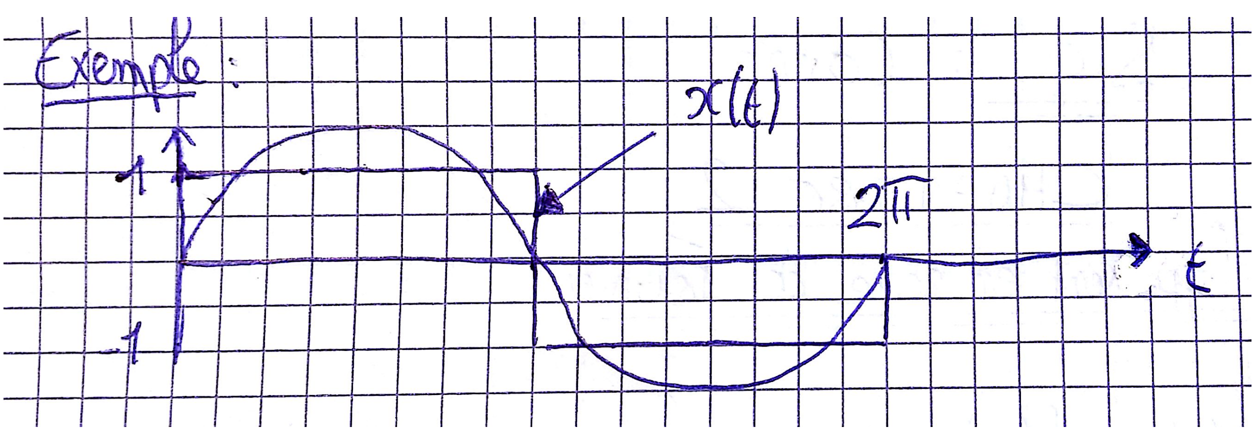
ε est minimum pour $\frac{\delta\varepsilon}{\delta C} = 0$ et pour $\frac{\delta^2\varepsilon}{\delta C^2} >= 0$ où :

$\frac{\delta\varepsilon}{\delta C} = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[C \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t)f(t)dt \right]$

$\frac{\delta^2\varepsilon}{\delta C^2} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt$

Ce qui implique :

$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)f(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt} = \frac{<x,f>}{<f,f>} = \frac{<x,f>}{||f||^2}$



f(t)=sin(t)

On a alors :

$C = \frac{\int_0^{\pi} sin(t)dt - \int_{\pi}^{2\pi} sin(t)dt}{\int_0^{2\pi} sin^2(t)} = \frac{4}{\pi}$

2 Approximation de x(t) par une base de fonctions orthogonales

On souhaite approcher x(t) sur [t1, t2] par $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$

où les fonctions f_i forment une base de fonctions orthogonales => = 0, i $\neq$j

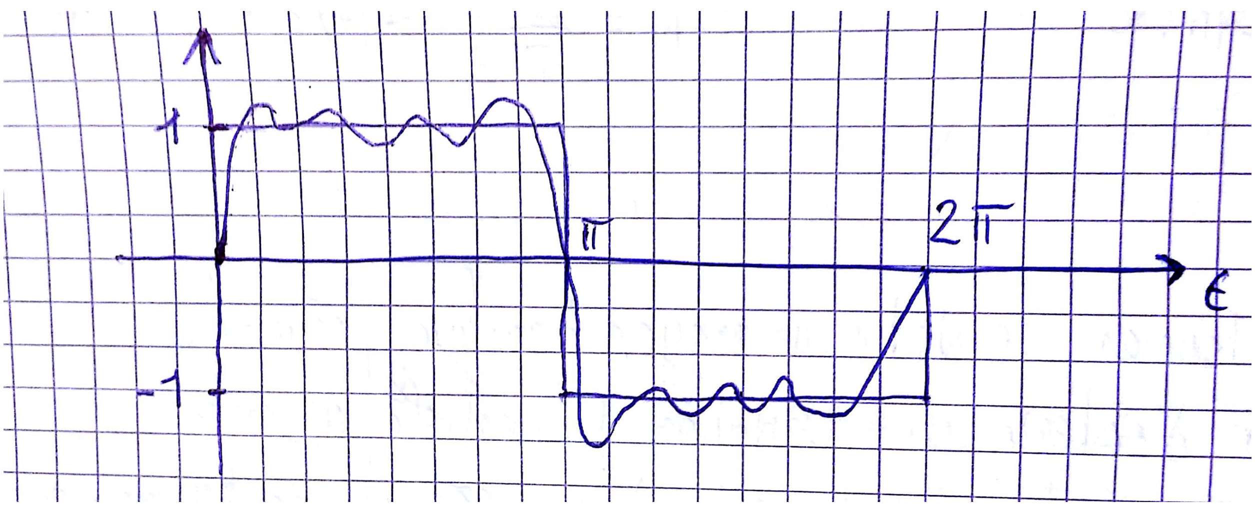
On a alors :

$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)]^2 dt$

Ce qui implique $C_i = \frac{<x, f_i>}{||f_i||^2}$ et donc x(t) peut être approcher par :

$x(t) \approx \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{<x, f_i>}{||f_i||^2} \cdot f_i(t)$

3 Exemple



$f_i(t) = sin(i \cdot t)$

On trouve :

$$\begin{cases} \frac{4}{i\pi} \text{si i impair} \\ 0 \text{ si i pair} \end{cases}$$

Et pour n=8, x(t) peut être approché par :

$x(t) = \frac{4}{\pi}(sin(t) + 1/3sin(3t) + 1/5sin(5t) + 1/7sin(7t))$

4 Développement en série de Fourier - Signaux à temps continu

Soit $x_T(t)$ le signal à temps continu de période T

(Il peut être obtenu par périodisation d'un signal non périodique à support borné)

On considère les fonction orthogonales : $cos(i\frac{2\pi}{T}t)$ et $sin((i\frac{2\pi}{T}t)$, i=0,1,2,...

L'intervalle est de largeur T, on choisit I=[-T/2, T/2]

On obtient alors :

$x_T(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos(i\frac{2\pi}{T}t) + b_n sin(i\frac{2\pi}{T}t)$

avec :

- $a_0 = \frac{1}{T}\int_I x_T(t)dt et b_0 = 0$
- $a_n = \frac{2}{T}\int_I x_T(t)cos(i\frac{2\pi}{T}t)dt$
- $b_n = \frac{2}{T}\int_I x_T(t)cos(i\frac{2\pi}{T}t)dt$

5 Développement en série de Fourier avec coefficients complexes

Ce qui s'écrit aussi :

Dévéloppement en série de Fourier

$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Cn \cdot e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$

Avec les coefficients de Fourier

$C_n = \frac{1}{T}\int_I x_T(t)e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}dt$

- Remarques :
  - La série de Fourier constitue un moyen d'analyse précieux
  - Elle permet d'obtenir une **représentation fréquentielle discrète** (spectre de raie) du signal, où chaque composante harmonique (raie) C_n est localisée à une fréquence $f_n = nf_0 = n/T$
- Relation de Perceval
  - $P_{x_T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x_T|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Cn|^2$

6 Développement en série de Fourier, temps discret

Soit $x_K(k)$ un signal discret K-périodique. Par un raisonnement siminlaire, on obtient la relation :

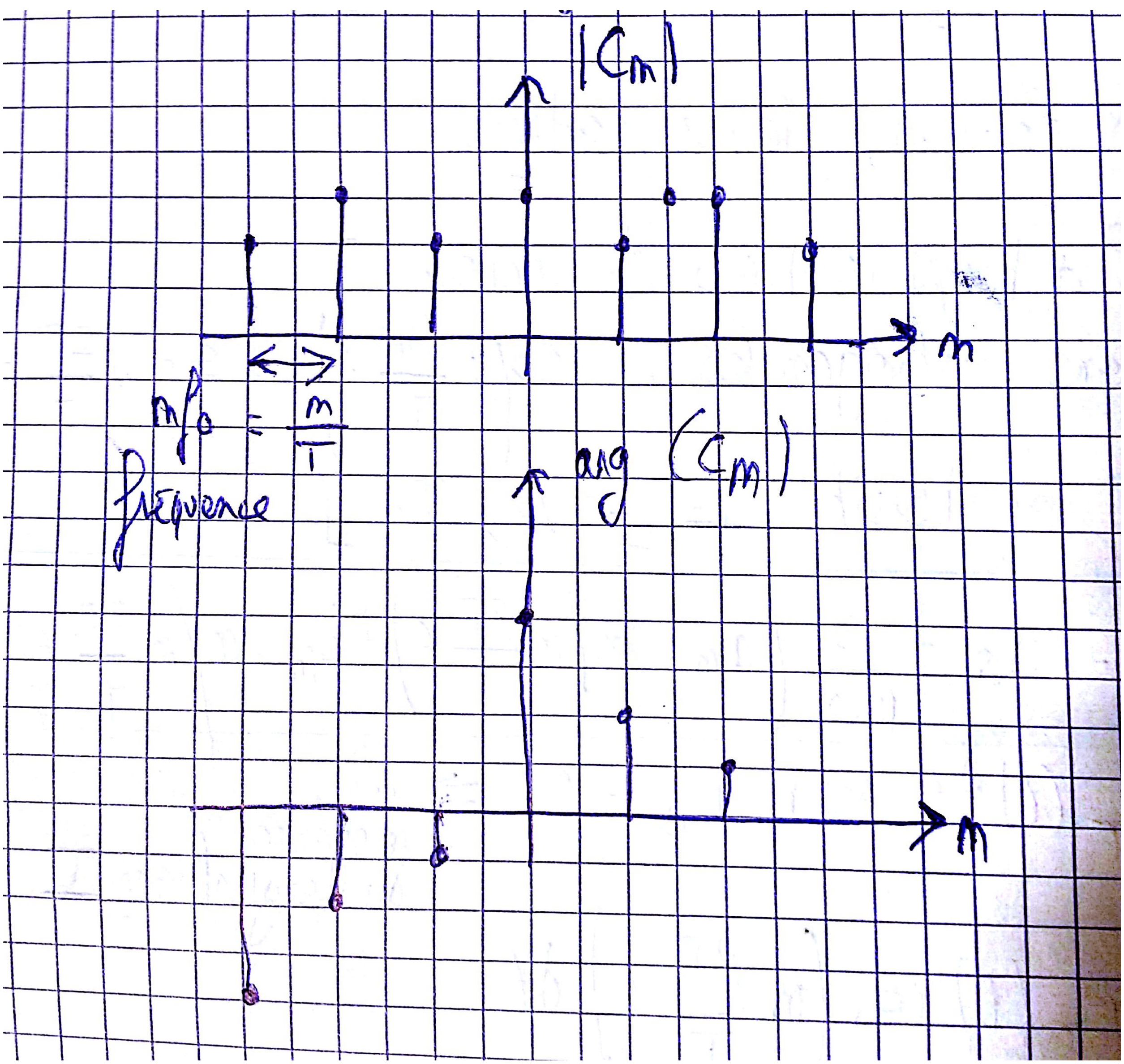
$x_K(k) = \sum_{n \leq K>} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k}$ où est tout intervalle de longueur K.

Remarque : Chaque exponentielle complexe de la somme est K-périodique.

On en déduit :

$x_K(k) = \sum_{n \leq K>} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k}$ avec $c_n = \frac{1}{K}\sum_{n=<K>} x_K(k)e^{-jn\frac{2\pi}{K}k}$

- Remarques
  - L'interprétation spectrale est la même qu'en continu
  - A temps discret, un nombre fini de coeff. suffit à décrire le signal
  - Dualité temps/fréquence
    - Signal périodique => Spectre discret
    - Signal discret => Spectre périodique


|Cm|
n
nfo = n/T
fréquence
arg (Cm)
n