Chapitre 1 : Introduction à la théorie du signal

Arthur Garnier
Schémas par Julien Bernardo

February 4, 2015

1 Classification des signaux

1.1 Classification dimensionnelle

- Signal scalaire ou monodimensionnel
  - Fonction d'un seul paramètre (pas forcément le temps) => s(x)
- Signal vectoriel => Signal à plusieurs dimentions
  - Signal bidirectionnel
    * Fonction de 2 paramètres. Ex : Une image => I(x,y)
  - Signal tridimentionnel
    * Fonction de 3 paramètres. Ex : Un film => F(x,y,t)

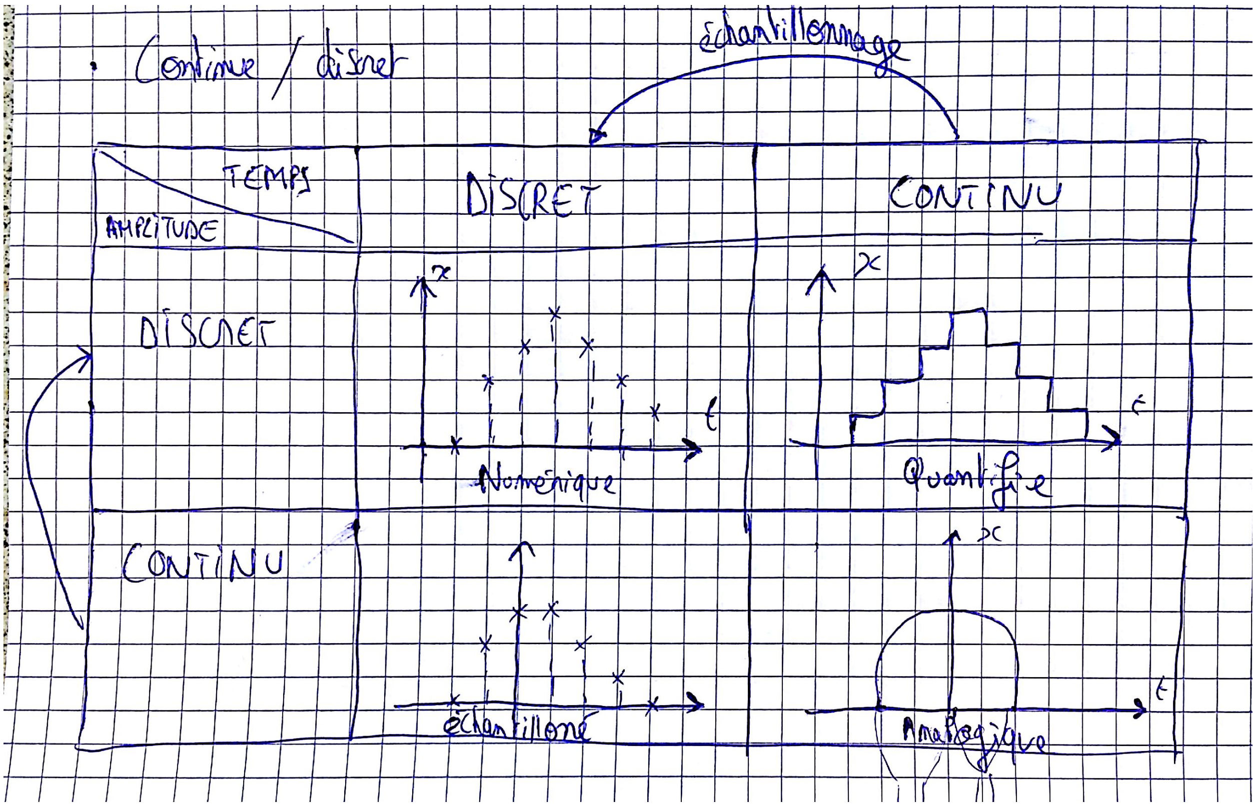
Signal à temps continue : x(t) & Signal à temps discret : x(k)

1.2 Classification phénoménologique (Signal déterministe ou aléatoire)

- Signaux déterministes : Signaux dont l'évolution peut être parfaitement décrite par une description mathématique ou graphique
  - périodique : $\exists T \in R, \forall t, x(t) = x(t+T)$
  - Apériodique
  - Transitoires : Signal à durée limitée = Signal à support borné
- Signaux aléatoires (ou stochastiques) : Signaux dont l'évolution est imprévisible : On ne peut pas prédire la valeur à un temps t. La description est fondée sur les propriétés statistiques des signaux (moyennes, variance, etc).
  - Stationnarité : Ses propriétés statistiques sont indépendantes du temps
    * Stationnaires
    * Non stationnaires

1.3 Un signal aléatoire particulier : Le bruit

- **Définition** : Perturbation pouvant gêner la perception ou l'interpretation d'un signal.
  - En général, il s'agit d'une fluctuation imprévisible due à l'environnement.
- La notion de bruit est relative. Elle dépend du contexte.



Par exemple, du technicien en télécom et de l'astronome :

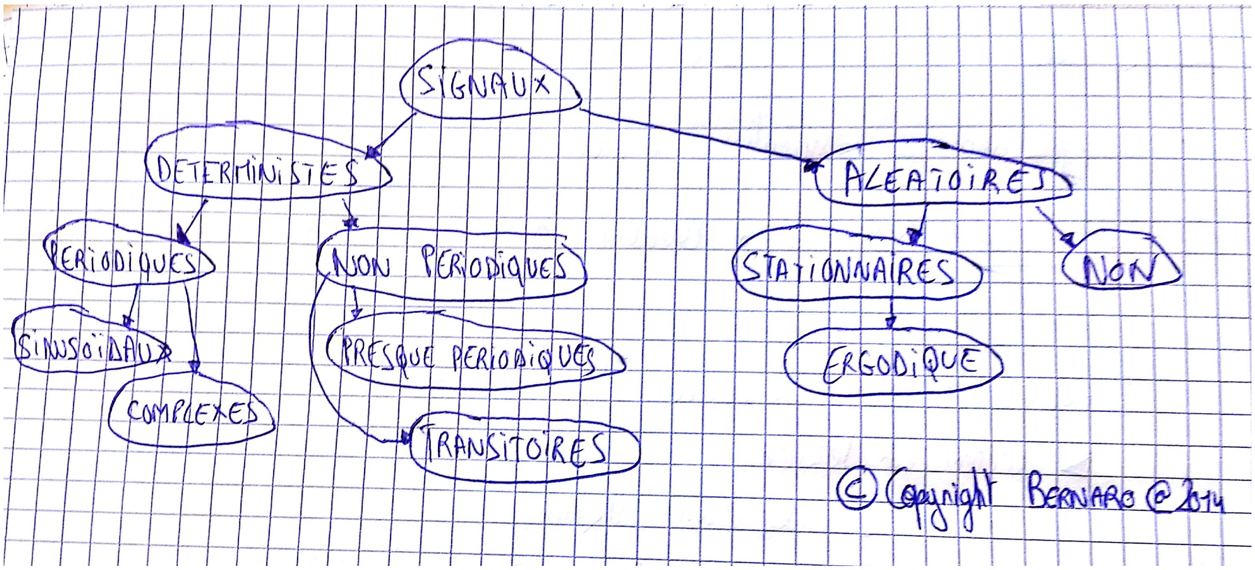
- Pour le technicien télécom
  - Signal = Onde d'un satellite
  - Bruit = Signaux d'une source astrophysique
- Pour l'astronome :
  - Signal = Signaux d'une source astrophysique
  - Bruit = Onde d'un satellite
- Tout signal physique comporte du bruit !!
  - Signal = Composante déterministe + composante aléatoire (le bruit)
- Rapport Signal sur bruit (RSB)
  - détermine la qualité du signal déterministe ou aléatoire / quatifie l'effet du bruit

$RSB = \frac{P_s}{P_b} RSB_{dB} = 10log_{10}(\frac{P_s}{P_b})$

- Signal : Sinusoïde pure ($P_s = \frac{A^2}{2}$)
- Bruit : Bruit gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2

2 Energie et puissance d'un signal

- Cas d'un signal continue x(t)



  - Energie totale : $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}x$
  - Puissance moyenne totale : $P_x = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t$
- Cas d'un signal discret x(k)
  - Energie totale : $E_x = \sum_{k}^{\infty} |x(k)|^2$
  - Puissance moyenne totale : $Px = \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{k=\frac{-K}{2}}^{\frac{k}{2}} |x(k)|^2$
- Remarques : $E_x < \infty => P_x = 0$ La puissance moyenne total d'un signal périodique est égale à celle sur une période

3 Classification énergétique

On distingue alors :

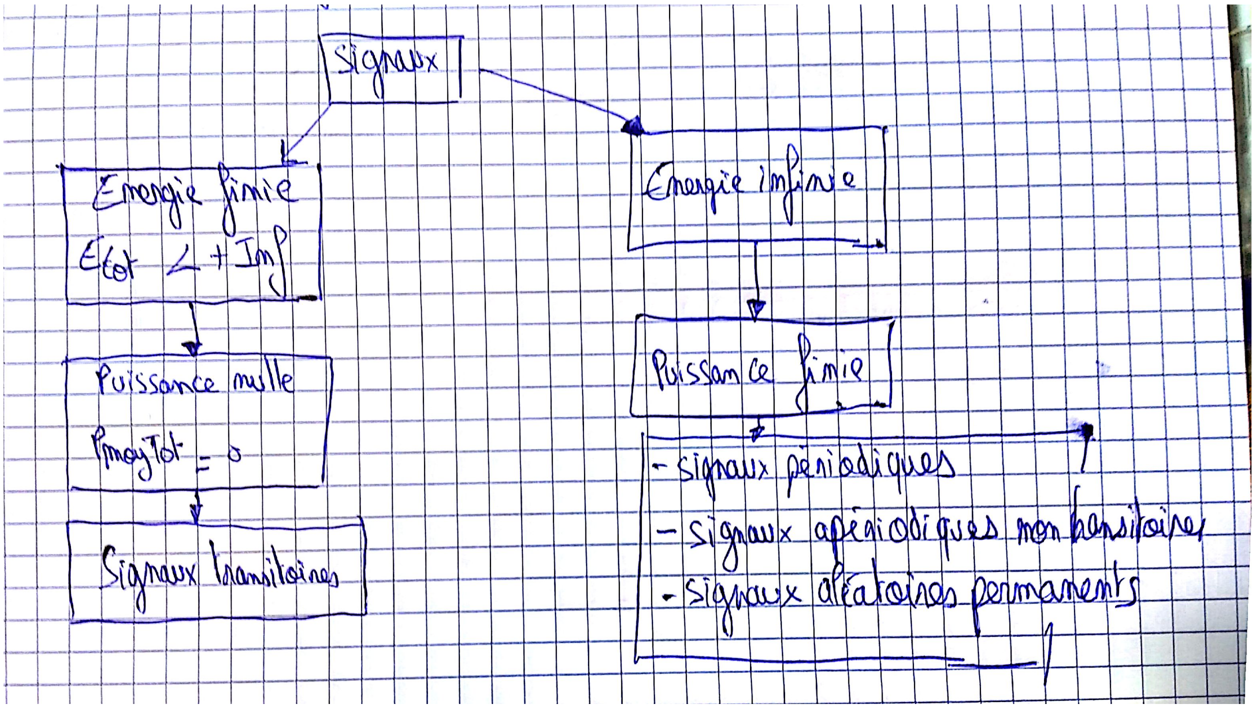
- Les signaux à énergie finie ($=> \mathrm{P_x} = 0$) :
  - Tous les transitoires, déterministes ou aléatoire : Cas de tous les signaux physique
- Les signaux à puissance moyenne finie non-nulle ($=> \mathrm{E_x} = \infty$) !
  - Tous les sigaux permanents, déterministes (périodiques ou quasi-périodiques) ou aléatoires

- Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces catégories
  - Ex : $x(t) = \exp(at)$ pour $-\infty < t < \infty$, impulsion de Dirac, peigne de Dirac, etc...

4 Signal sinusoïdal

$s(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \theta_0) = A \cdot \sin(\omega_0 (t + \tau))$

Avec :



- A : Amplitude du signal
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$: pulsation (en rad/s)
- T_0 : Période du signal (en s)
- f_0 fréquence fondamentale (en Hz)
- $\theta(t) = \omega_0 t + \omega_0$: Phase instantanée
- $\theta(0) = \omega_0 \tau$: Phase à l'origine (pour t=0) (en rad)
- τ : décalage (en s) de s(t) par rapport à 0 (retard si $\tau < 0$; avance si $\tau > 0$)

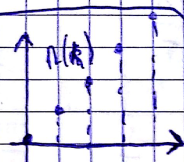
Remarque : lien avec exponentielle complexe $\exp^{j\omega_0 t} = cos(\omega_0 t) + j \cdot sin(\omega_0 t)$

5 Les signaux échelons et rampes

- La rampe unitaire

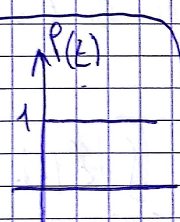
$$r(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ t \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$$r(k) = \begin{cases} 0 \text{ pour } k < 0 \\ k \text{ pour } k \geq 0 \end{cases}$$

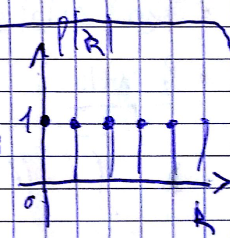


- L'échelon unitaire

$$P(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$P(k) = \begin{cases} 0 \text{ pour } k < 0 \\ 1 \text{ pour } k \geq 0 \end{cases}$$



- La rampe unitaire
- L'échelon unitaire
  - L'échelon 1(t) est la dérivée (discontinue à l'origine) de r(t). Il n'est pas défini en t=0.
  - Signal causal : Signal qui est nul pour tout t<0 (origine des temps). L'échelon permet d'écrire ceci de façon condensé :

$$\begin{cases} 0 & \text{pour t<0} \\ Ce^{at} & \text{pour t>=0} \end{cases} = Ce^{at} \cdot 1(t)$$

6 Impulsion de Dirac

- Définition pratique
- Représentation par une flèche verticale en t=0 d'amplitique égale à l'aire (ici 1)
- Ce n'est pas une fonction, mais se définit rigoureusement grâce à la théorie des distributions
- Propriétés de l'impulsion de Dirac :
  - $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$ (pour $s(t) = 1, t_0 = 0$)
  - Produit d'un signal par une impulsion de Dirac :
    * $s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$
    * $s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$ (pour t_0=0)
  - Changement de variable : $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
- Autres propriétés :
  - $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$
  - $1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau$

7 Impulsion unitaire discrète

- L'impulsion unitaire discrète
- Propriétés :
  - $\delta(k) = \Delta 1(k) = 1(k) - 1(k-1)$
  - $1(k) = \sum_{n=0}^{k} \delta(n) = \sum_{n=-\infty}^{k} \delta(n) = \sum_{n=0}^{k} \delta(k-n)$

8 Le peigne de Dirac et Signal échantillonné (échantillonnage idéal)

$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

Signal échantillonné (échantillonnage idéal)

Un signal échantillonné résulte du produit d'un signal continu par un peigne de Dirac. La période du peigne est appelée période d'échantillonnage et notée Te. On obtient alors un train d'impulsions modulées en amplitude par des valeurs du signal continue aux instants kTe, dits "instants d'échantillonnage". Dans la réalité, les impulsions sont de durée petite par rapport à Te.

$x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t-kT_e)$

9 Produit de convolution

Définition : On appelle produit de convolution de deux signaux x et g :

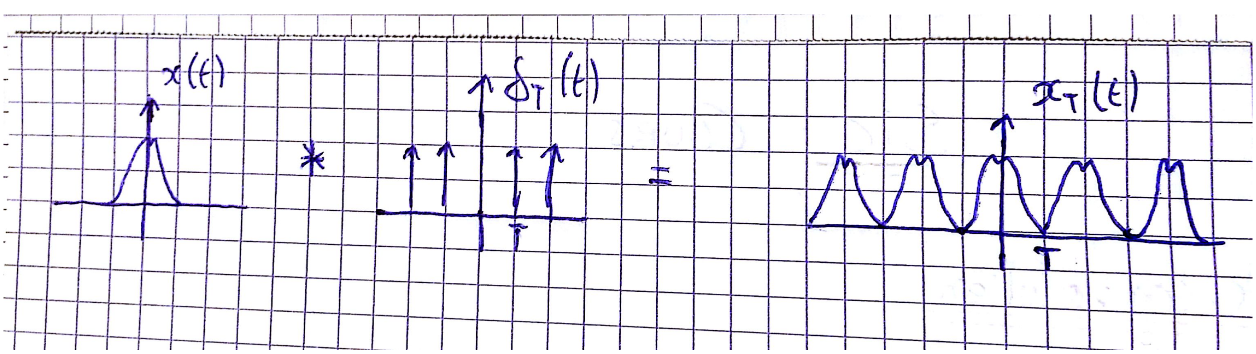
```
* Temps continu
    * $y(t)=[x*g](t)=\int_{-infty}^\infty x(\tau)g(t-\tau) dr$
* Temps discret
    * $y(k)=[x*g](k)=\sum_{n=-\infty}^\infty x(n)g(k-n)$
```

- Propiétés
  - Communativité : gx=xg
  - Associativité : $(x * g_1) * 2 = x * (g_1 * g_2)$
  - Distribitivité : $(g_1 + g_2) * x = (g_1 * x) + (g_2 * x)$

10 Produit de convolution avec impulsion de Dirac

Par abus de notation on peut écrire x(t)*g(t)

- Propriétés
  - $x(t) * \delta(t) = x(t)$
  - $x(t) * \delta(t - \tau) = x(t - \tau)$
  - $x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_1)$
    - Cas particulier : $\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$
- Périodisation du signal x(t)
  - $x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = x_T(t)$



11 Produit de scalaire de 2 signaux

- Définition
  - Cas de signaux complexes
    - $= \int_{-infty}^{\infty} x1(t) \cdot x2^*(t)dt$
  - Où * représente la conjugaison complexe
  - Cas de signaux rééls

$* = \int_{-infty}^{\infty} x1(t) \cdot x2(t)dt$

Dans le cas complexe, on remarque que $\neq$

En revanche, cette définition possède la **symétrie hermitienne** : =^*^

- Cas Particulier avec l'impultion de Dirac
- $< f, \delta >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t)dt = f(0)$
- $< g\delta, f >=< \delta, gf >$

12 Encore quelques propriétés de l'impulsion de Dirac

- Changement de variable : $\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t)$
  - En particulier : $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\delta(f)$
- Dérivation
  - $(\delta f)' = \delta' f + f' \delta$
  - $< \delta', f >= - < \delta, f' = -f'(0)$
  - $< \delta^n, f >= (-1)^n < \delta, f^n >$
  - $(\delta * f)' = \delta' * f = \delta * f'$
- De plus, on verra, dans la suite, que la transformée de Fournier peut être étendue au cas des distributions