Modélisation des Systèmes à Evénements Discrets

Réseaux de Pétri

TELECOM Nancy 1ère Année

Vincent Bombardier

(MdC 61ème Section)

Centre de Recherche en Automatique de Nancy -UMR CNRS 7039-

Département: Ingénierie des Systèmes Eco-Technique

Projet Systèmes Intelligents Ambiants

Plan du cours

1. Généralités
2. Formalisme de base

   Définition, Représentation matricielle, Marquage, Graphe associé
3. Fonctionnement d'un RdP

   Transition Franchissable, matrice d'incidence, séquence de franchissement, franchissable, Equation fondamentale, Grammaire associée, Marquage accessible et graphe, arbre de couverture.
4. Analyse structurelle des RdP – Propriétés

   Propriétés structurelles, Conflit, Propriétés fonctionnelles, Invariants.

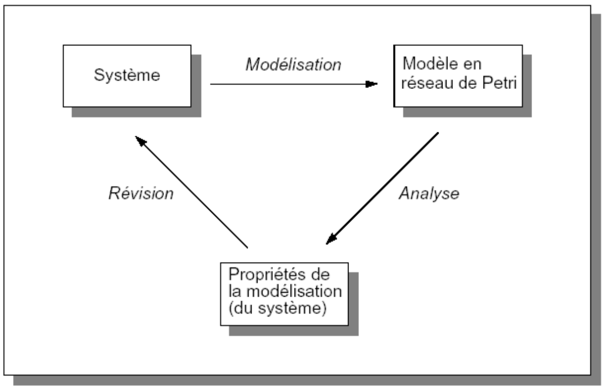
1. Généralités

1.1 ORIGINE / OBJECTIFS

Carl Adam Petri définit en **1962** un outil mathématique très général pour décrire les relations existant entre des conditions et des événements. D'origine mathématique, cet outil est ensuite très utilisé en informatique et en automatique.

Un **réseau de Petri** (RdP) est un **outil de modélisation** permettant l'étude de **systèmes dynamiques et discrets**. La **syntaxe** des RdP est **graphique** et la **sémantique** est fondée sur une **représentation mathématique**.

L'analyse d'un RdP peut révéler des caractéristiques importantes du système modélisé concernant sa **structure** et son **comportement dynamique**. Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration le cas échéant.



1. Généralités

1.2 AVANTAGES DES RDP

Adaptés aux systèmes distribués

Présentation graphique, intuitive

Analyse formelle, preuve

Nombreuses extension (colorés, stockastiques, flous, ..)

Quantité d'outils ou support : Design CPN

_______http://www.daimi.au.dk/CPnets/intro

1. Généralités

1.3 EXEMPLES D'APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES RDP

- Bases de données distribuées
- Multiprocesseurs à mémoire distribuée
- Simulateur de combat
- Systèmes mécatroniques de voitures (PSA Peugeot-Citroën)
- Réseau de téléphones portables (Nokia)
- Contrôle à distance multipoint de chaînes hi-fi (Bang&Olufsen)
- Processus de gestion de déchets nucléaires
- Autres exemples :
  http://www.daimi.au.dk/CPnets/intro/example_indu.html

2. Formalisme de base

2.1 DEFINITION D'UN RESEAU DE PETRI

Un **RdP ordinaire non marqué** est un quadruplet **Q =(P, T, Pré, Post)** où :

P = {P1, P2, …, Pn} est un ensemble fini non vide de **Places**
T = {T1, T2, …, Tm} est un ensemble fini non vide de **Transitions**
Avec P et T disjoints

Pré : PxT $\rightarrow$ {0,1} est l'**application d'incidence avant** *(Pré(Pi,Tj) = 1 si un arc existe entre Pi et Tj)*
Post : PxT $\rightarrow$ {0,1} est l'**application d'incidence arrière** *(Post(Pi, Tj) = 1 si un arc existe entre Tj et Pi)*

Un **RdP généralisé** est défini de la même manière mais avec :

Pré : P x T $\rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence avant
*(Pré(Pi, Tj) = **poids** de l'arc si l'arc existe entre Pi et Tj, 0 sinon)*

Post : P x T $\rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence arrière
*(Post(Pi, Tj) = **poids** de l'arc si l'arc existe entre Tj et Pi, 0 sinon)*

2. Formalisme de base

2.2 NOTATION MATRICIELLE

On représente les applications d'incidence avant et arrière par des MATRICES:

m lignes pour m Places
n colonnes pour n Transitions

Pré (., t) ou Post (.,t) sont les colonnes associées à la transition t

Pré(p,.) ou Post (p,.) sont les lignes associées à la place p

Ex1: R= (P,T, Pré, Post) avec P={P1, P2, P3, P4, P5} et T={T1, T2, T3, T4}

$$\text{PRE} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array}$$

Matrice d'incidence avant

$$\text{POST} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array}$$

Matrice d'incidence arrière

2. Formalisme de base

2.3 MARQUAGE

Dans un RdP marqué, chaque place contient un nombre entier >=0 de marques ou jetons M(Pi) = m_i
Un réseau marqué est définit par le couple :
N=<R, M> avec M une application de N -> P appelée marquage

Le marquage du RdP est le vecteur M = (m_1, …,m_i, …m_p) avec m_i = M(Pi) marquage de la place Pi ou nombre de marques (ou jeton) de Pi

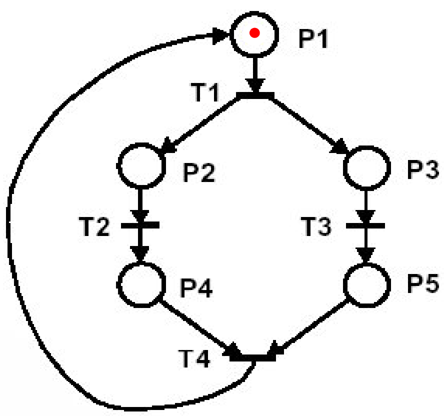
2.4 GRAPHE ASSOCIE A UN RDP

Un RdP est un graphe orienté biparti (alternant deux types de sommets : PLACES et TRANSITIONS). Tout arc orienté doit obligatoirement avoir un sommet à chacune de ses extrémités.
G = <P, T, Γ, V> associé au RdP R=<P, T, Pré, Post> est défini par:

$\forall p \in P$, $\Gamma(p) = \{t \in T \text{ tq Pré } (p,t) > 0\}$
$\forall t \in T$, $\Gamma(t) = \{p \in P \text{ tq Post } (p,t) > 0\}$

Ex1: R= (P,T, Pré, Post) avec P={P1, P2, P3, P4, P5} et T={T1, T2, T3, T4}
Avec $M_0 = [0, 1, 1, 0, 0]^T$

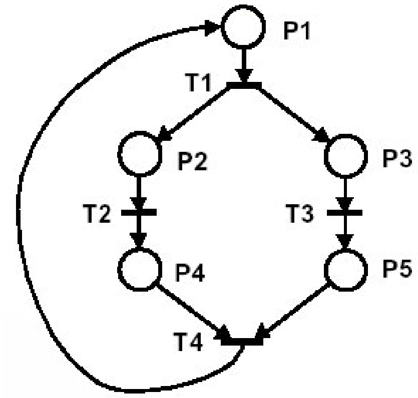
$$\text{PRE} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array} \quad \text{POST} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} \end{array}$$



3 - Fonctionnement d'un RdP

3.3 Matrice d'incidence

La **matrice d'incidence** du RdP ci-dessous est donc la matrice **C = Post - Pré**



$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc}T1&T2&T3&T4\end{array} & \\ \begin{pmatrix}-1&0&0&+1\\+1&-1&0&0\\+1&0&-1&0\\0&+1&0&-1\\0&0&+1&-1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}P1\\P2\\P3\\P4\\P5\end{array}\end{array}$$

Cette matrice est indépendante du marquage et indique **en colonne** la **modification du marquage** apportée par le franchissement de la transition correspondante

3 - Fonctionnement d'un RdP

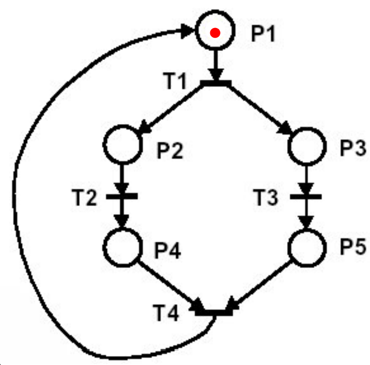
3.4 Transition franchissable : fonctionnement d'un réseau

Une transition t est franchissable pour un marquage M ssi : $\forall$ p $\in$ P, M(p) $\geq$ Pré (.,t)

Notation: M_0 (T_1 > : T_1 est franchissable à partir du marquage M0

Le franchissement de t donne M' tel que: $\forall$ p $\in$ P, M'(p) = M(p) - Pré (p,t) + Post (p,t) = M(p) + C(p,t)

Notation: M_0 (T_1 > M_1 : Le franchissement de T_1 à partir de M_0 donne M_1



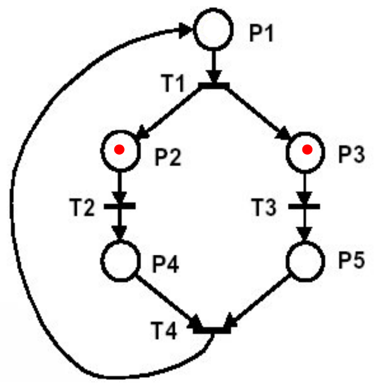
$M_0 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$

$M_0 \geq$ Pré (., T_1) = $[1, 0, 0, 0, 0]^T$

T_1 Franchissable: M_0 (T_1 >

Donc M_0 (T_1 > M_1 = $[0, 1, 1, 0, 0]^T$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc}T1&T2&T3&T4\end{array} & \\ \begin{pmatrix}-1&0&0&+1\\+1&-1&0&0\\+1&0&-1&0\\0&+1&0&-1\\0&0&+1&-1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}P1\\P2\\P3\\P4\\P5\end{array}\end{array}$$



3 - Fonctionnement d'un RdP

3.3 SÉQUENCE DE FRANCHISSEMENT : EQUATION FONDAMENTALE

Une séquence de transition T_1 T_2 est franchissable pour un marquage M ssi :

$M\ (\ T_1 > M_1$ ET $M_1\ (\ T2_1 > M_2$

Notation: $M\ (\ T_1\ T_2 > M_2$

On définit une séquence ***s*** de T* comme franchissable pour M donnant M'' ssi

soit $s = \lambda$ alors $M'' = M$

$s = s't$ avec $s' \in T^*$ et $t \in T$ ET

$\exists\ M'$ tq $M\ (\ s' > M'$ et $M'(\ t > M''$

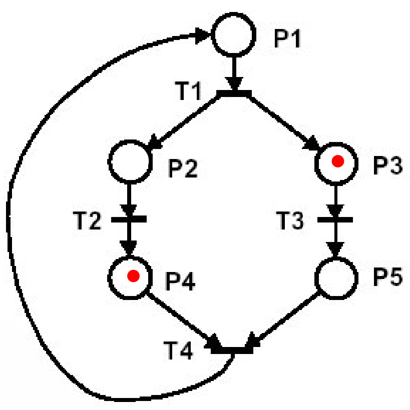
L'**équation fondamentale** d'un RdP s'écrit : $\boxed{M_k = M_i + C\ .\ \bar{s}}$

Elle permet de trouver le marquage résultat (M_k) du tir d'une **séquence S** à partir du marquage M_i.
Le vecteur caractéristique $\bar{s}$ s'écrit comme un **vecteur de dimension m** (nombre de transitions) dont la j^{ème} composante correspond au nombre de franchissements de la transition T_j dans la séquence S)

3 - Fonctionnement d'un RdP

3.3 SÉQUENCE DE FRANCHISSEMENT : EXEMPLE

$M_k = M_i + C.\bar{s}$



Le marquage atteint à partir du marquage M_i = (0,1,1,0,0) par **franchissement de T2** est :

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & +1\\ +1 & -1 & 0 & 0\\ +1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & +1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & +1 & -1\end{pmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\+1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Le marquage atteint à partir du marquage M_k = (0,0,1,1,0) par **franchissement de la séquence (T3 T4 T1 T3)** est :

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & +1\\ +1 & -1 & 0 & 0\\ +1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & +1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & +1 & -1\end{pmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\+1\\-1\\-1\\+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

3 - Fonctionnement d'un RdP

3.4 Marquage Minimal

Permet de déterminer si une séquence est franchissable pour un marquage M.

On définit les applications $\widehat{Pré}$ et $\widehat{C}$ sur P x T* telles que :

$M (s >$ si et seulement si $\widehat{Pré} (. , s) \leq M$

Alors: $M (s > \overline{M}$ si et seulement si $\overline{M} = M + \widehat{C} (. , s)$ et s est franchissable

Les applications Pré et C sont définies par récurrence sur la longueur de s:

soit s = λ alors $\widehat{Pré} (p , s) = \widehat{C} (p , s) = 0$
s = s' t et

$$\widehat{Pré} (p , s) = \max (\widehat{Pré} (p , s') ; Pré (p , t) - \widehat{C} (p , s'))$$

$$\widehat{C} (p , s) = \widehat{C} (p , s') + C (p , t)$$

Le marquage minimal pour que franchissement de s depuis M est donné par $\widehat{Pré}$

3 - Fonctionnement d'un RdP

3.5 Graphe des Marquages Accessibles

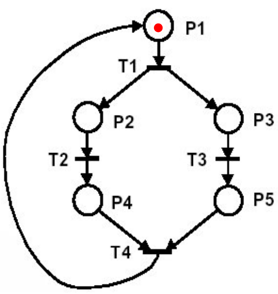
L'ensemble des marquages accessibles pour le RdP R à partir de M est :

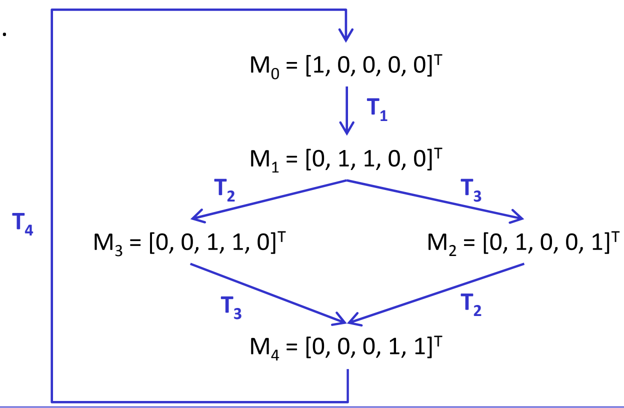
$$A (R, M) = \{ M' \in N^m \text{ tq } \exists s \in T^* , M (s > M' \}$$

Le graphe des marquage accessible GA (R , M, V) est défini comme le graphe orienté et valué ayant A (R , M) comme ensemble de sommets et dont les arcs sont définis par la relation : $M (> M'$ ssi $\exists t \in T$ tq $M (t > M'$

Les arcs sont étiquetés par la transition correspondante.

Le graphe est connexe par construction.





3 - Fonctionnement d'un RdP

3.6 Graphe et Arbre de Couverture

Si l'ensemble des marquages accessibles pour le RdP R à partir de M_0 n'est pas un ensemble fini, on peut tracer un **graphe de couverture**.

Le graphe de couverture est obtenu après construction de **l'arbre de couverture** d'un RdP non borné.

Algorithme de construction de l'arbre de couverture:

Init: Créer les sommets M_i successeurs de M_0. Indiquer les transitions franchissables.
Si $M_i > M_0$, on note ω les composantes strictement supérieures aux composantes de M_0.

Faire pour chaque nouveau sommet M_i :
Rechercher sur le chemin de M_0 à M_i s'il existe M_j avec i <> j tq $M_j = M_i$
Si oui : M_i n'a pas de successeur.

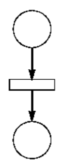
Sinon créer les successeurs M_k de M_i , indiquer les transitions franchissables.
- Une composante ω de M_k reste une composante ω
- S'il existe M_j sur le chemin de M_0 à M_k tq $M_k > M_j$ alors on note ω les composantes de M_k strictement supérieures à celles de M_j

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.1 PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

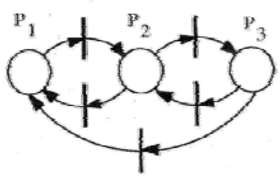
*Les propriétés structurelles concernent les RdP **non marqués**.*

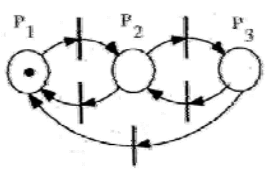
GRAPHES D'ETATS



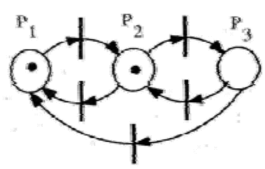
Un RdP non marqué est un **graphe d'états** si et seulement si toute transition a **exactement 1 place d'entrée** et **1 place de sortie**.

Remarque : si on *marque* un RdP qui est un **graphe d'état**, son comportement sera celui d'un graphe qui ne possède qu'un seul état à la fois (contient exactement une marque et une seule).





Graphe d'états
(à 3 états)



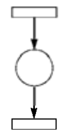
Marquage non compatible avec
le comportement d'un Graphe d'états

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.1 PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

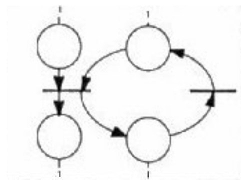
GRAPHES D'ÉVÉNEMENTS

Un RdP est un **graphe d'événements** si et seulement si toute place a **exactement 1 transition d'entrée** et **1 transition de sortie**.



RDP PUR

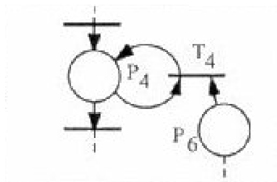
Un RdP est dit « **pur** » s'il n'existe pas de transition ayant **une place d'entrée qui soit aussi place de sortie** de cette même transition.



RDP SANS BOUCLE

Un RdP **sans boucle** est tel que s'il existe une transition Tj et une place Pi qui est à la fois place d'entrée et place de sortie de Tj, alors Tj a au moins une **autre place d'entrée**.

Remarque : l'ensemble des RdP sans boucle inclut l'ensemble des RdP purs.

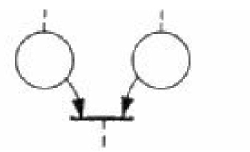


4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.2 PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP : LES CONFLITS

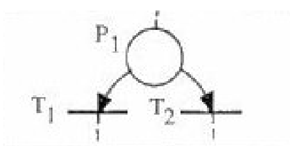
RDP SANS CONFLIT

Un RdP est dit « **sans conflit** » si chacune de ses places a **au plus une transition de sortie**.



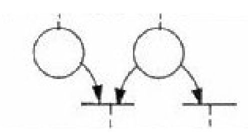
RDP À CHOIX LIBRE

Un RdP **à choix libre** est un RdP dans lequel pour tout **conflit** provoqué par des transitions Tj, aucune de ces transitions ne possède une autre place d'entrée que celle à partir de laquelle le conflit est provoqué.



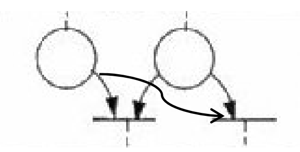
RDP SIMPLE

Un RdP est dit « **simple** » si chacune de ses transitions ne peut être concernée que par **un conflit au plus**.



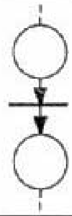
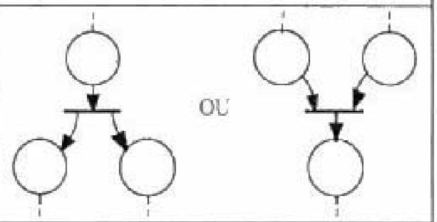
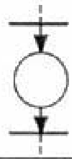
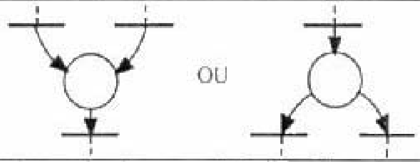
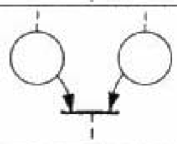
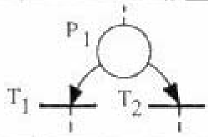
RDP À CHOIX LIBRE ETENDU

Un RdP **à choix libre étendu** est un RdP dans lequel pour tout **conflit** provoqué par des transitions Tj, si une de ces transitions possède une autre place d'entrée que celle à partir de laquelle le conflit est provoqué alors toutes les autres transitions ont également cette place en entrée.



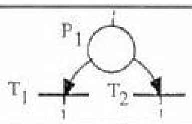
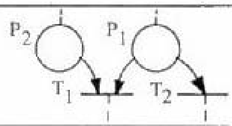
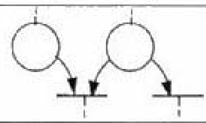
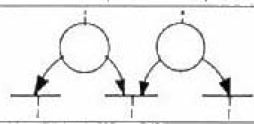
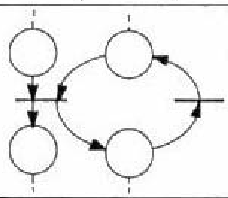
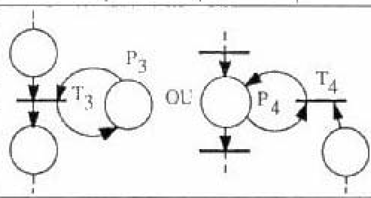
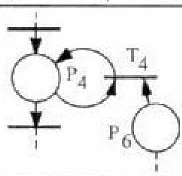
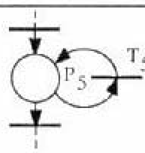
4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

Dans un réseau de Petri qui est ...	on peut trouver ...	on ne peut pas trouver ...
graphe d'états		
graphe d'événements		
sans conflit		

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

Dans un réseau de Petri qui est ...	on peut trouver ...	on ne peut pas trouver ...
à choix libre		
simple		
pur		
sans boucle		

4.3 PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

Un RdP est **BORNÉ** pour un marquage initial M_0 si **toutes ses places sont bornées** (pour tout marquage accessible le nombre de marques de chaque place est fini)

Un RdP est **SAUF** pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible chaque place contient **au plus une marque**

Un RdP est **VIVANT** pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont vivantes. Une transition T_j est vivante ssi $\forall$ Mi $\in$ A(R,M0), $\exists$ s $\in$ T* contenant T_j

Un RdP est **QUASI-VIVANT** pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont quasi-vivantes. Une transition T_j est vivante ssi depuis M_0, $\exists$ s $\in$ T* contenant T_j

Un RdP est **CONFORME** pour un marquage initial M_0 s'il est sauf et vivant

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.3 PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

Un **CONFLIT EFFECTIF** est un conflit structurel pour lequel le marquage Mi est inférieur au nombre de transitions franchissables pour Mi.

Un **BLOCAGE** (ou *état puits*) est un marquage tel qu'**aucune transition n'est franchissable**

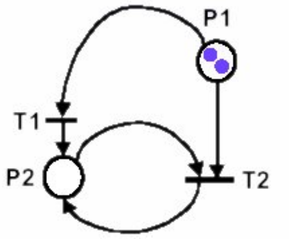
Un RdP est dit **SANS BLOCAGE** pour un marquage initial M_0 si aucun de ses marquages accessibles n'est un **blocage**

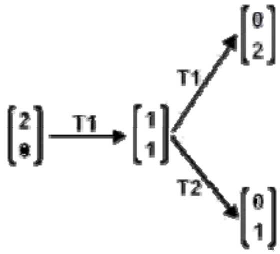
Un RdP est **RÉINITIALISABLE (ou PROPRE)** pour un marquage initial M_0 si depuis tout marquage accessible il existe une **séquence conduisant à M_0**

Un RdP est **PERSISTANT** pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible on a T_j et T_k franchissable, alors $T_kT_j$est franchissable (et donc T_jT_k)

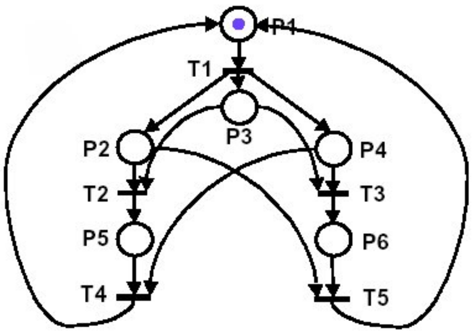
4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

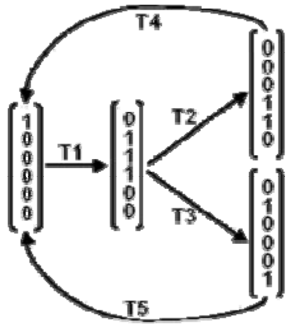
4.3 PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP : Exemples





Ce RdP est **borné**, **non vivant** (2 états de blocage) et **non réinitialisable**.





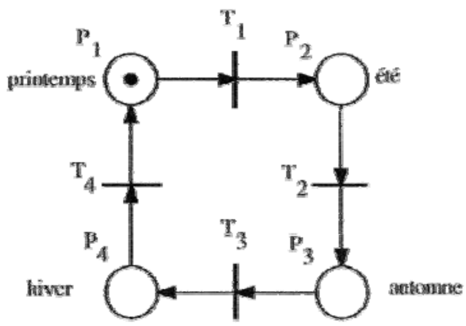
Ce RdP est **sauf**, **vivant** et **réinitialisable**.

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.4 INVARIANTS

À partir d'un marquage initial, le marquage d'un RdP peut évoluer par franchissement de transitions, et, s'il n'y a pas de blocage, le nombre de franchissements de transition est **illimité**. Néanmoins, **on ne pourra pas atteindre n'importe quel marquage** et **on ne pourra pas franchir n'importe quelle séquence de transitions**. Des **INVARIANTS** permettent de caractériser certaines propriétés des **marquages accessibles** et des **transitions franchissables**, quelle que soit l'évolution.

Sur l'exemple ci-contre, on voit bien que, quelle que soit l'évolution, il y aura toujours **une et une seule marque** pour l'ensemble des 4 places. Donc, à tout instant, on a $\mathbf{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1}$. Cet ***invariant*** a une signification évidente : *à tout instant, on est dans une et une seule saison !*



COMPOSANTE CONSERVATIVE / REPETITIVE

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.4 INVARIANTS : COMPOSANTE CONSERVATIVE

Soit un Réseau de Petri R et P l'ensemble de ses places. Le RdP R aura un **invariant de places** s'il existe un **sous-ensemble de places** P' = {$P_1, P_2, \ldots, P_r$} inclus dans P et un **vecteur de pondération** ($q_1, q_2, \ldots, q_r$) dont tous les poids q_i sont des nombres entiers positifs tels que :

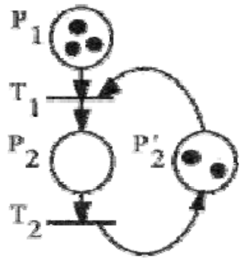
$$\mathbf{q_1.M(P_1)+q_2.M(P_2)+\ldots+q_r.M(P_r) = constante}, \text{ pour tout } M \in {}^*M_0$$

L'ensemble de places P' est une **composante conservative**.

Le **RdP R** est dit **conservatif** si et seulement si **P est une composante conservative**.

La propriété d'être **composante conservative** est **indépendante du marquage initial** (c'est une propriété du RdP non marqué).

En revanche, la **constante** de l'invariant dépend du marquage initial.



$M(P_2) + M(P'_2) = 2$
mais si le marquage initial était
$M_0(P_2) + M_0(P'_2) = N$,
on aurait $M(P_2) + M(P'_2) = N$

4 - Analyse structurelle des RdP – Propriétés

4.4 INVARIANTS : RECHERCHE DES INVARIANTS DE PLACE

Algorithme :

Init : Construire la matrice [Id | C]

Pour chaque indice j (transition Tj) :
- Ajouter à la matrice [Id | C] autant de lignes qu'il y a de combinaison linéaires de 2 lignes à coefficients positifs, annulant l'élément (i,j)
- Eliminer de la matrice [Id | C] les lignes dont les coefficients (i,j) ne sont pas nuls

Fin pour

Les invariants de marquage correspondent aux lignes non nulles de A

Exemple:

$$\begin{array}{cccc|ccc|c}
 & & & & T_1 & T_2 & T_3 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & P_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & P_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & P_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & P_4
\end{array}$$