Modélisation des Systèmes à Evénements Discrets

Théorie des graphes

TELECOM Nancy 1ère Année

Vincent Bombardier
(MdC 61ème Section)

Centre de Recherche en Automatique de Nancy -UMR CNRS 7039-
Département: Ingénierie des Systèmes Eco-Technique
Projet Systèmes Intelligents Ambiants

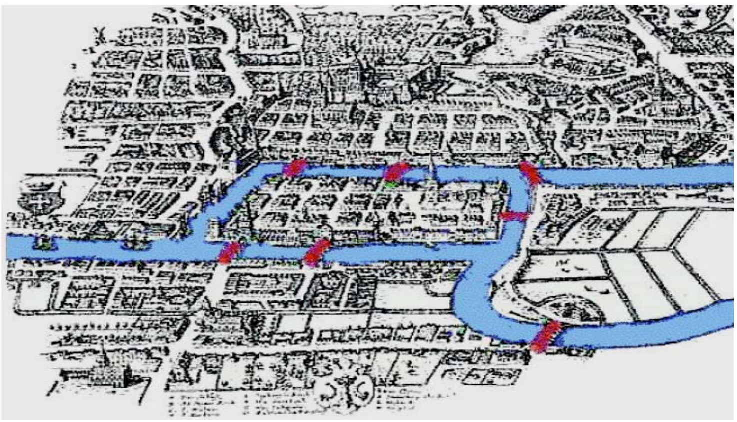
Plan du cours

1. Historique
2. Concepts généraux - Définitions
3. Représentation d'un graphe
4. Etude de la connexité
5. Graphes particuliers
6. Parcours dans un graphe
7. Coloration d'un graphe

- Modélisation
  - Plusieurs problèmes dans différentes disciplines (chimie, biologie, sciences sociales, applications industrielles, …)
  - Un graphe peut représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations

- Un graphe est une structure de données puissante pour l'informatique

Ponts de Konigsberg (Euler 1736)



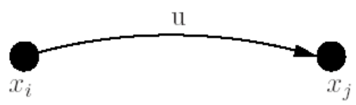
1847 : Kirchhoff : Arbres pour l'analyse de circuits électriques
1857 : Cayley : Arbres pour décrire les isomères saturés des hydrocarbures
1850-1879 : De Morgan/ Cayley: Conjecture des 4 couleurs
1976: Appel et Haken: Preuve du théorème solution
1859: Sir Hamilton: jeu dodécaèdre : Pb du voyageur de commerce

1958 : Claude Berge : théorie des graphes et applications

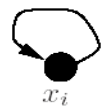
Définitions

➢ Concepts orientés

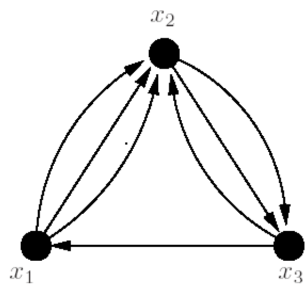
- Un graphe G(X,U) est déterminé par
  - Un ensemble $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ de sommets
  - Un ensemble $U=\{u_1, \ldots, u_m\}$ du produit cartésien X×X d'arcs.
- Un *p*-graphe : pas plus que *p* arcs (x_i,x_j)



Arc u=(xi,xj)

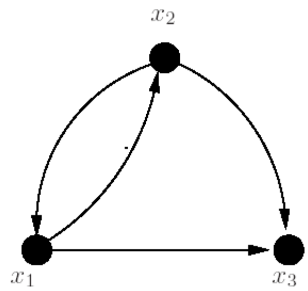


boucle



3-graphe

1-graphe = graphe



Définitions

➢ Graphes et applications multivoques

- x_j est successeur de x_i si $(x_i,x_j)\in U$
- L'ensemble des successeurs de x_i est noté $\Gamma(x_i)$
- L'ensemble des prédécesseurs de x_i est noté $\Gamma^{-1}(x_i)$
- Γ est appelée une **application multivoque** sur X qui, à chaque sommet x, associe le sous-ensemble $\Gamma(x)$ des sommets atteignables depuis x.

  On utilise alors la notation : $G = (X, \Gamma)$

➢ L'ordre du graphe G, noté $|G|$, est le nombre de sommets du graphe. ($|G| = |X|$)

➢ Pour un 1-graphe, G peut être parfaitement déterminé (ou caractérisé) par (X,Γ)

Définitions

➢ Concepts non orientés

- On s'intéresse à l'existence d'arcs entre deux sommets *sans en préciser l'ordre*
- Arc = *arête*
- U est constitué de *paires* non pas de couples
- *Multigraphe* : plusieurs arêtes entre deux sommets
- *Graphe simple* = non multigraphe + pas de boucles

Définitions

➢ Adjacence de sommets

Deux sommets x_i et x_k de X sont ***adjacents*** si x_i est un successeur de x_k ou si x_k est un successeur de x_i.

$$x_i \text{ adjacent à } x_k \equiv \quad x_i \in \Gamma(x_k) \text{ ou } x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)$$

Dans un graphe non orienté : $\exists\, a \in A : a = \{x_i , x_k\}$

Dans un graphe orienté : $\exists\, u \in U : u = (x_i , x_k)$ ou $u = (x_i , x_k)$

➢ Degré d'un sommet dans un graphe orienté

Un arc $u \in U$ est un ***arc incident à x vers l'extérieur*** si l'extrémité initiale de u coïncide avec le sommet $x \in X$. On note U_x^+ l'ensemble des arcs incidents à x vers l'extérieur.

Un arc $u \in U$ est un ***arc incident à x vers l'intérieur*** si l'extrémité terminale de u coïncide avec le sommet $x \in X$. On note U_x^- l'ensemble des arcs incidents à x vers l'intérieur.

Le ***demi-degré extérieur*** (ou degré sortant) de x, noté $d^+(x)$, est le nombre d'arcs incidents à x vers l'extérieur. $d^+(x) = |U_x^+|$.

Le ***demi-degré intérieur*** (ou degré entrant) de x, noté $d^-(x)$, est le nombre d'arcs incidents à x vers l'intérieur. $d^-(x) = |U_x^-|$.

Le ***degré*** de x, noté $d(x)$, est le nombre des arcs ayant une extrémité coïncidant avec x. $d(x) = d^-(x) + d^+(x)$.

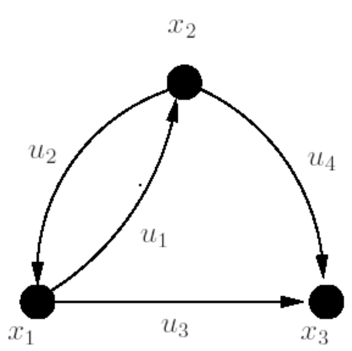
- Graphe *réflexif* : $\forall x_i \in X,\ (x_i, x_i) \in U$.
- Graphe *irréflexif* : $\forall x_i \in X,\ (x_i, x_i) \notin U$.
- Graphe *symétrique* : $\forall x_i, x_j \in X,\ (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$.
- Graphe *asymétrique* : $\forall x_i, x_j \in X,\ (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U$ (si G est asymétrique, G est irréflexif).
- Graphe *antisymétrique* : $\forall x_i, x_j \in X,\ (x_i, x_j) \in U$ et $(x_j, x_i) \in U \Rightarrow x_i = x_j$ (si G est asymétrique, G est aussi antisymétrique).
- Graphe *transitif* : $\forall x_i, x_j \in X,\ (x_i, x_j) \in U, (x_j, x_k) \in U \Rightarrow (x_i, x_k) \in U$.
- Graphe *complet* : $\forall x_i, x_j \in X,\ (x_i, x_j) \notin U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$.
- *Clique* : ensemble des sommets d'un sous-graphe complet. Soit $\mathcal{C} \subset X$ une clique de G non orienté : $\forall (x_i, x_j) \in \mathcal{C}, (x_i, x_j) \in U$ (2 sommets distincts de G sont toujours adjacents). Notons qu'un graphe complet et antisymétrique s'appelle un « tournoi », car il symbolise le résultat d'un tournoi où chaque joueur est opposé une fois à chacun des autres joueurs.

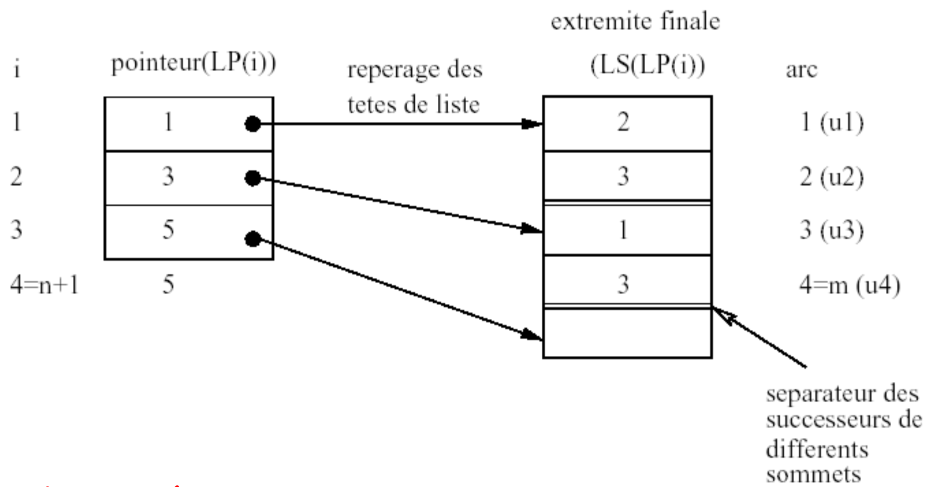
Définitions

- *Graphe complémentaire*
  $G = (X, U)$ et $\overline{G} = (X, \overline{U})$. $(x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_i, x_j) \notin \overline{U}$ et $(x_i, x_j) \notin U \Rightarrow (x_i, x_j) \in \overline{U}$. $\overline{G}$ est le *graphe complémentaire* de G.
- *Graphe partiel*
  $G = (X, U)$ et $U_p \subset U$. $G_p = (X, U_p)$ est un *graphe partiel* de G. (On peut ainsi obtenir des sommets isolés...)
- *Sous-graphe*
  $G = (X, U)$ et $X_s \subset X$. $G_s = (X_s, V)$ est un *sous-graphe* de G, où V est la restriction de la fonction caractéristique de U à X_s. $V = \{(x, y)/(x, y) \in U \cap X_s \times X_s\}$. $\forall x_i \in X_s,\ \ \Gamma_s(x_i) = \Gamma(x_i) \wedge X_s$.
- *Sous-graphe partiel*
  Combine les deux définitions précédentes.

2. Représentations d'un graphe

- Listes de succession: Dictionnaire
  - Liste des ascendants
  - Liste des descendants

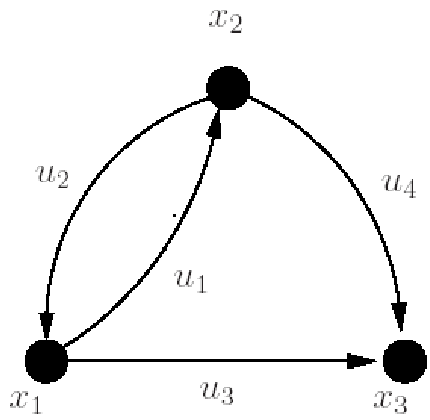




Place mémoire : n+1+m

2. Représentations d'un graphe

➢ Matrice d'adjacence



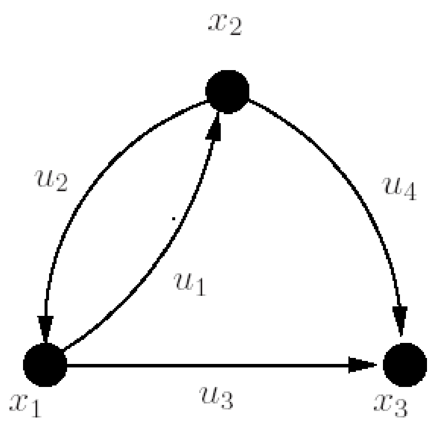
	x_1	x_2	x_3	$\leftarrow$ destination
x_1	0	1	1	
x_2	1	0	1	
x_3	0	0	0	
$\uparrow$ origine				

Place mémoire : n^2

Propriétés: réflexif, symétrique (non orienté), antisymétrique, complet

2. Représentations d'un graphe

➢ Matrice d'incidence sommets-arcs



	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	-1	1	0
x_2	-1	1	0	1
x_3	0	0	-1	-1

Place mémoire : n x m

3. Connexité dans les graphes

Une ***chaîne*** *c* est une séquence (u_1 , u_2 , … , u_m) d'arcs telle que : u_k est semi-adjacente à u_{k+1} pour k, $0 < k < m$.

Une ***chaîne simple*** est une chaîne dont les <u>arêtes sont toutes distinctes</u>.

Un ***cycle*** est une chaîne simple dont l'extrémité initiale du premier arc u_1 coïncide avec l'extrémité finale du dernier arc u_m.

Un ***chemin*** *c* est une séquence (u_1 , u_2 , … , u_m) d'arcs telle que : u_k est adjacente à u_{k+1} pour k, $0 < k < m$.

Un ***chemin simple*** est un chemin dont les <u>arêtes sont toutes distinctes</u>.

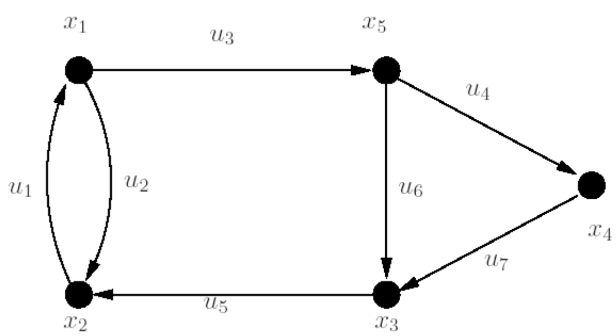
Un ***circuit*** est un chemin simple dont l'extrémité initiale du premier arc u_1 coïncide avec l'extrémité finale du dernier arc u_m.

3. Connexité dans les graphes

➢ Chaîne – Cycle (non orienté)

$< u_2, u_5, u_6, u_4 >$ est une chaîne de x_1 à x_4.

$< u_4, u_7, u_6 >$ est un cycle



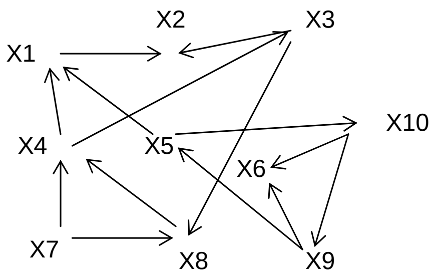
➢ Chemin – Circuit (orienté)

$< u_1, u_3, u_4, u_7 >$ *est un chemin de* x_2 *à* x_3.

$< u_1, u_3, u_6, u_5 >$ *est un circuit.*

➢ Recherche de circuits dans un graphe:

- Sur le graphe



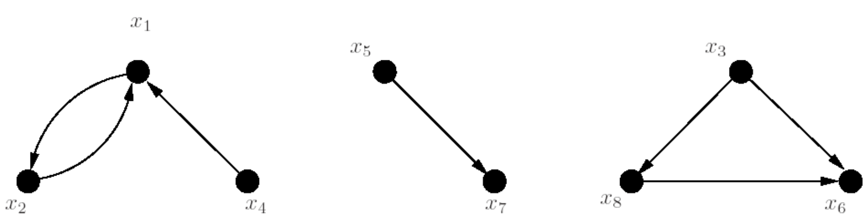
- Dans la matrice d'adjacence
- Dans la liste de succession

➢ Connexité

Un graphe $G = (X, U)$ est *connexe* si $\forall i, j \in X$, il existe une chaîne entre i et j.

On appelle *composante connexe* le sous-ensemble de sommets tels qu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques.

Un graphe est connexe s'il comporte une composante connexe et une seule. Chaque composante connexe est un graphe connexe.



3. Connexité dans les graphes

➢ Forte connexité

Un graphe $G = (X, U)$ est *fortement connexe* si $\forall\, i, j \in X$, il existe un chemin entre i et j.

Une *composante fortement connexe (cfc)* est un sous-ensemble de sommets tel qu'il existe un chemin entre deux sommets quelconques. Une *cfc maximale (cfcm)* est un ensemble maximal de cfc. Les différentes cfcm définissent une partition de X.
Un graphe est fortement connexe s'il comporte une seule cfcm.

➢ Recherche des CFC: Méthode de Malgrange

➢ Graphe réduit

4. Graphes particuliers

- Graphes à capacité (valué – étiqueté)
- Ordonner un Graphe sans circuit
- Graphe Périodique
- Graphes disjoints (recherche)
- Graphe biparti
- Graphe planaire
- Arbre – Arbre couvrant – de poids minimum (Prim)
- Forêt
- Arborescence - Reconnaissance
- Réseaux – Réseaux de transport

- Longueur d'une chaine, d'un chemin
  - La longueur d'une chaîne (ou d'un chemin) c, notée l(c), correspond aux nombres d'arcs de la chaîne (ou du chemin).
- Calcul : Méthode matricielle

- Carré de la matrice d'adjacence $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \times \mathbf{A}$

$$A^2_{ij} = A_{i1} \times A_{1j} + \ldots + A_{ik} \times A_{kj} + \ldots + A_{in} \times A_{nj}$$

$\neq 0$ si $A_{ik} = 1$ et $A_{kj} = 1$

si x_i a pour successeur x_k

x_k a pour successeur x_j

A^2_{ij} = nombre de chemins de longueur 2 de x_i vers x_j

Si **A** est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté $G = (X,U)$.

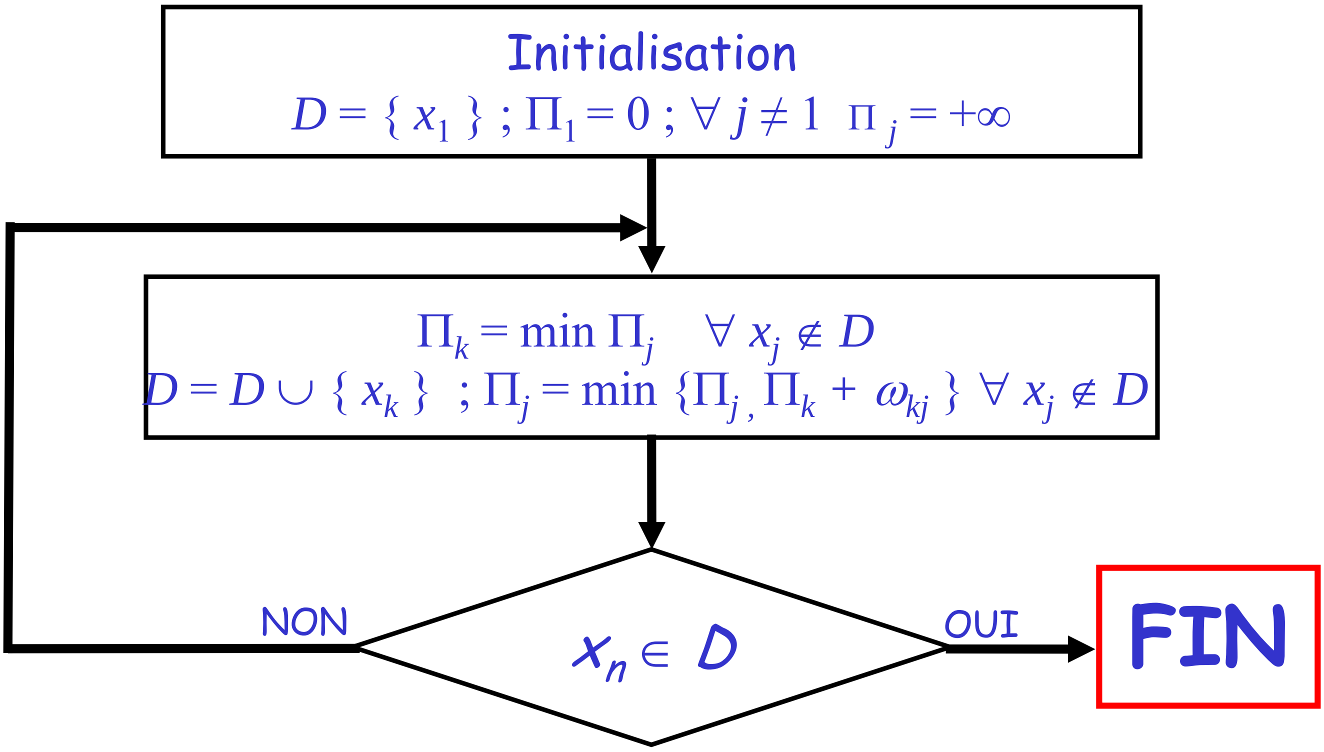
A^p_{ij} = nombre de chemins de longueur p de x_i vers x_j.

- Algorithme de Dijkstra : plus court chemin de l'origine à tous les autres sommets
  - Utilise des labels pour les sommets
    - Les labels permanents représentent la valeur du pcch de l'origine jusqu'au sommet correspondant
    - Les labels temporaires représentent une borne supérieure de ce pcch
  - A chaque itération un label temporaire est transformé en label permanent
  - Graphe à valuation positive

Algorithme de Dijkstra

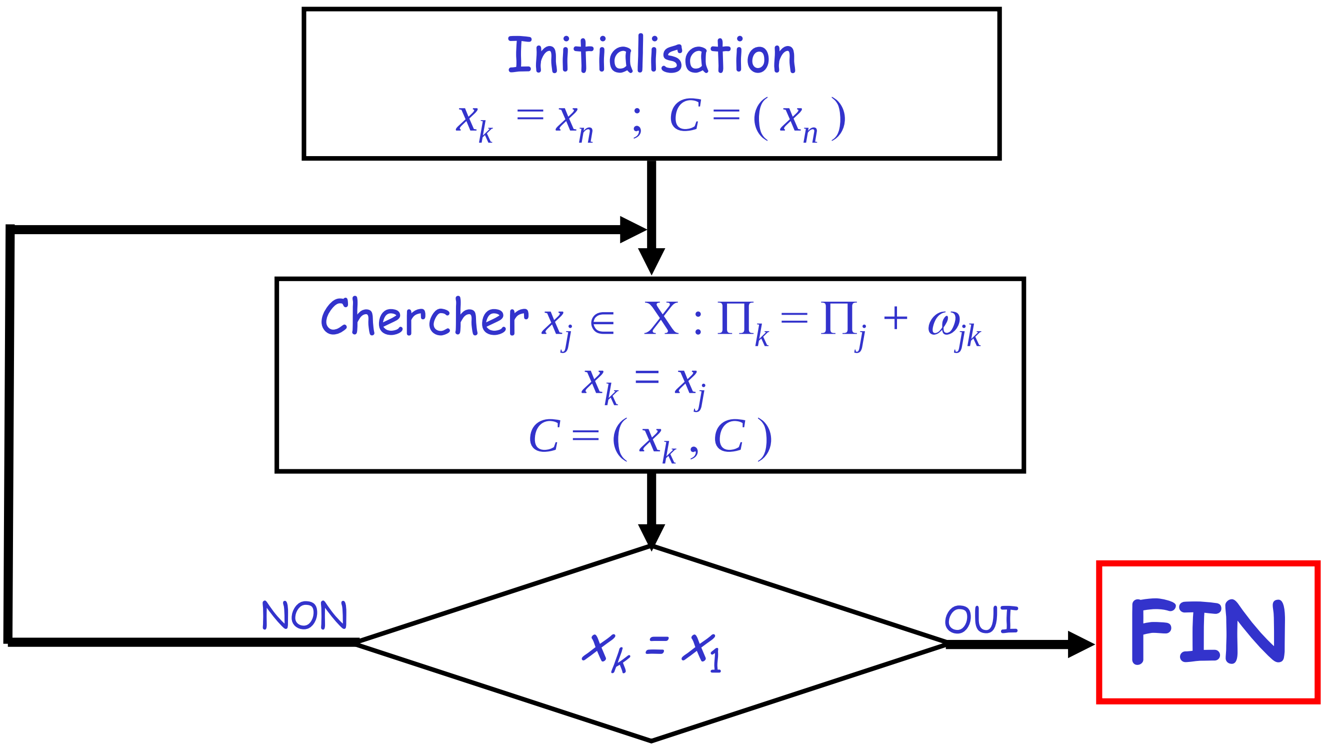
- Etape 1
  - $\Pi_1 = 0$;
  - $\Pi j = +\infty$, pour j=2,…, n
  - D={1}, T={2, …, n}
- Etape 2 (Désignation du label permanent)
  - Déterminer $k \in T$, tq $\Pi_k = \min\{j \in T, u_j\}$
  - $T = T \setminus \{k\}$ et $D = D \cup \{k\}$
  - Si T=vide, stop
- Etape 3 (Révision des labels temporaires)
  - $\Pi_j = \min \{ \Pi_j, \Pi_k + \omega_{kj} \}$ pour tout $j \in T$
  - Aller à l'étape 1

- Recherche du chemin le plus court: Algorithme de Dijkstra



5. Parcours dans un graphe

- Obtention du chemin à partir des poids minimaux



- Le terme *parcours* regroupe les chemins, les chaînes, les circuits et les cycles
- Un parcours peut être
  - élémentaire : tous les sommets sont distincts
  - simple : tous les arcs sont distincts
  - hamiltonien : passe une fois et une seule par chaque sommet
  - eulérien : passe une fois et une seule par chaque arc
  - préhamiltonien : au moins une fois par chaque sommet
  - préeulérien : au moins une fois par chaque arc

- Théorème d'Euler:
  - Non orienté
    - Chaine :
      - Nb de degré impair égal 0 ou 2
    - Cycle:
      - Nb de degré impair égal 0
  - Orienté
    - Chemin :

      $\mathbf{d^-} = \mathbf{d^+}$ sauf (a,b) : $d^-(a) = d^+(a)-1$ et $d^-(b)=d^+(b)+1$
    - Circuit:

      $\mathbf{d^-} = \mathbf{d^+}$

5. Parcours dans un graphe

- **Graphe Hamiltonien:**
  - Contient un parcours Hamiltonien
  - S'il en existe 2 sans arêtes communes : 3
  - 1-graphe complet FC : 1 circuit H
  - 1-graphe complet antisymétrique
    - Transitif : 1 et 1 seul chemin H
    - Non transitif : nb impair de chemin H

6. Coloration d'un graphe

- On définit deux types de coloration pour un graphe $G=(X, A)$; la coloration des arêtes et la coloration des sommets.
- La coloration des sommets (resp. des arêtes) d'un graphe G correspond à l'affectation d'une couleur à chacun des sommets (resp. des arêtes) de telle sorte que deux sommets (resp. arêtes) adjacents ne soient pas porteur de la même couleur.
- Un graphe est dit p-chromatique si ses sommets admettent une coloration en pcouleurs.
- On appelle nombre chromatique $\gamma(G)$ (resp. indice chromatique $q(G)$) le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration des sommets (resp. des arêtes) de G.

6. Coloration d'un graphe

- Un sous-ensemble de sommets $S \subset X$ est un ensemble stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.
- Les sommets coloriés de la même couleur dans une coloration des sommets forment donc un ensemble stable.
- Une coloration des sommets est donc une partition des sommets en ensembles stables.
- Soit $\alpha(G)$ le nombre de stabilité, c'est-à-dire le cardinal maximum d'un ensemble stable, alors si $\gamma(G)$ est le nombre chromatique, puisque chaque ensemble de sommets de même couleur a un cardinal inferieur ou égal à $\alpha(G)$, on a :

$$\gamma(G)\ \alpha(G) \geq N(G)$$

où $N(G)$ est le nombre de sommets du graphe G.

On en déduit : $\gamma(G) \geq N(G) / \alpha(G)$

6. Coloration d'un graphe

- La détermination du nombre chromatique d'un graphe ainsi que l'obtention d'une coloration minimale des sommets constituent un problème assez complexe.
- En pratique, on utilise souvent des algorithmes de coloration heuristiques
- Le nombre chromatique (G) possède des bornes inférieures et supérieures.
- Pour un graphe à n sommets et m arêtes, on a :

  $\gamma(G) \geq n / (n - dmin)$ avec dmin degré minimum des sommets de G

  $\gamma(G) \geq$ cardinal de la plus grande clique de G

  $\gamma(G) \geq n^2 / (n^2 - 2m)$

  $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ avec $\alpha(G)$ nombre de stabilité du graphe G

  $\gamma(G) \leq dmax + 1$ avec dmax degré maximum des sommets de G

6. Coloration d'un graphe

Algorithme de Welsh et Powell

- Etape 0 : Initialisation

  M : matrice d'adjacence du graphe dont les sommets sont rangés par ordre de degré décroissants

  $k = 1$

- Etape 1

  $N = M$

- Etape 2

  Colorer par la couleur c_k la première ligne non encore colorée de N ainsi que la colonne correspondante

  N = ensemble des lignes non encore colorées ayant un zéro dans les colonnes de couleur c_k

  si N $\neq \varnothing$ aller à l'étape 2 sinon aller à l'étape 3

- Etape 3

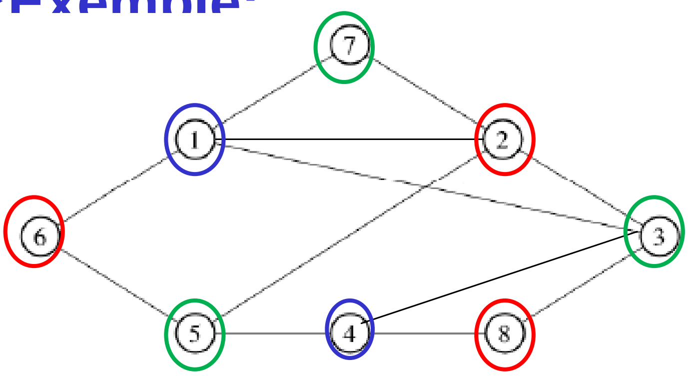
  Si toutes les lignes sont colorées alors STOP (on a une k-coloration)

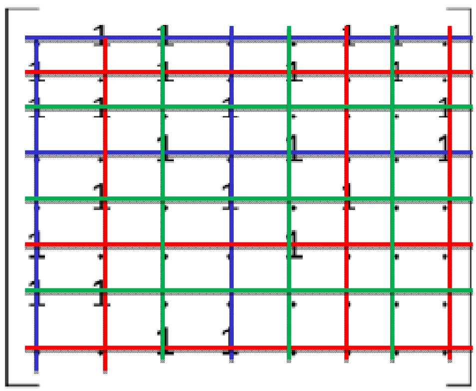
  $k = k + 1$; (changer de couleur)

  aller à l'étape 1

6. Coloration d'un graphe

Exemple:





$\gamma(G) \geq n / (n - dmin) = 7/5$
$\gamma(G) \geq Card(C1=\{7, 2, 1\}) = 3$
$\gamma(G) \geq n^2 / (n^2 - 2m) = 49 / (49 - 24) = 2$
$\gamma(G) \geq n / \alpha(G) = 7/4$

$\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G) = 4$ avec $\alpha(G) = 4$
$\gamma(G) \leq dmax + 1 = 5$

- **Graphe quelconque:**
  - **Méthode de Malgrange:**
    - **1 CFC**
    - **Plusieurs CFC:**
      - -Etude des disjonctions:
        - -Plusieurs Graphes
        - -Un Graphe : ordonner
          - -> arborescence ?

Composante fortement connexe:

- **Boucle?**
  - Si oui: Graphe FC, non périodique avec boucle

    G qqc, Symétrique, Anti sym ou complet
  - Sinon : Périodicité ?
    - ->Si oui: Graphe Périodique

      Décomposer en s/s graphes:

      s/s G complet ou antisymétrique
    - ->Si non: Graphe non Périodique sans boucle

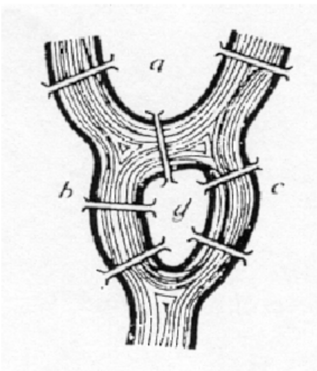
      G symétrique, anti sym ou complet.

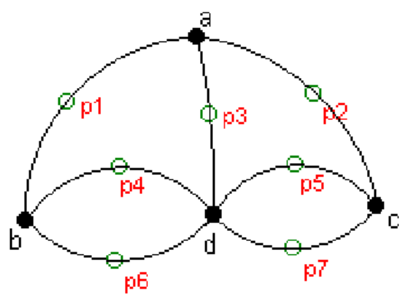
Références bibliographiques

- P. Lopez, *Cours de graphes*, LAAS-CNRS
  http://www.laas.fr/~lopez/cours/GRAPHES/graphes.html
- Ph. Vallin and D. Vanderpooten. Aide à la décision : une approche par les cas. Ellipses, Paris, 2000.
- M. Gondron, M. Minoux, *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1984
- C. Prins, *Algorithmes de graphes*, Eyrolles, Paris, 1994
- Ph. Lacomme, C. Prins, M. Sevaux, *Algorithmes de graphes*, Eyrolles, 2003
- B. Baynat, Ph. Chrétienne, …, *Exercices et problèmes d'algorithmique*, Dunod, 2003
- E. Lawler, Combinatorial Optimization – Networks and matroids, Dover Publications, INC, 1976.

Exemples

Au XVIII^{ème} siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?





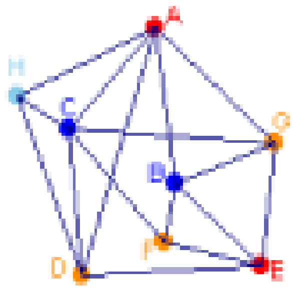
En 1736, Euler a montré que c'est impossible !!

retour

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?



4. Graphes particuliers

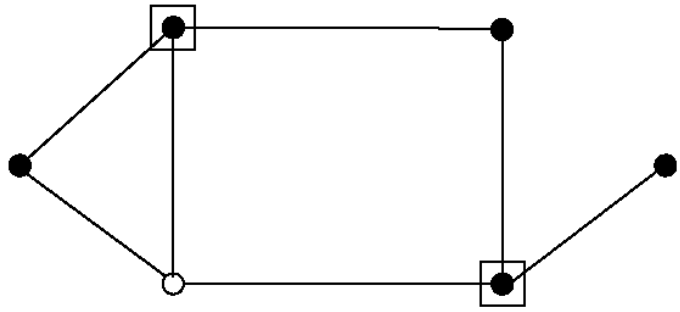
Graphe orienté valué

- Un ***graphe orienté valué*** *G* est défini par :
- Un ensemble de ***sommets*** *X*.
- Un ensemble d'***arcs*** $U \subset X^2$.
- Une ***valuation*** $V : U \rightarrow$ R qui à chaque arc du graphe associe une valeur réelle (poids).

- On utilise alors la notation : $G = (X , U , V)$

6. Coloration d'un graphe

Définition 2 *La* coloration *des sommets d'un graphe consiste en une affectation de couleurs à tous les sommets du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.*



Définition 1 *S* … *sous-ensemble $S \subset X$ e*
un ensemble sta … *adjacents deux à deux*
$\forall\, i, j \in S \Rightarrow (i,$ …